



Codes LDPC

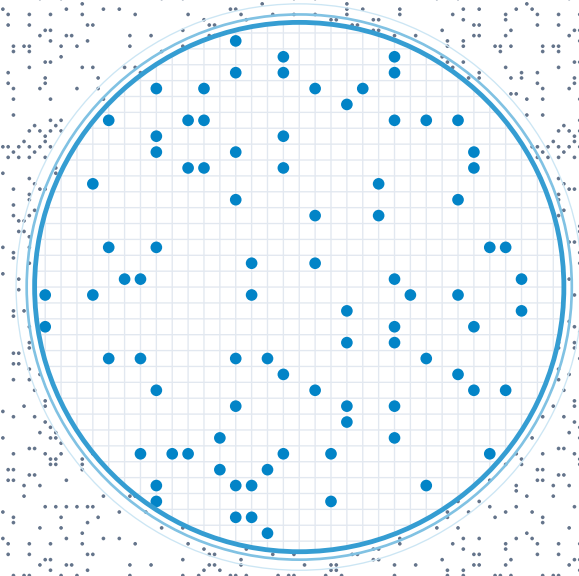
Anthony PERRONI

n°49871

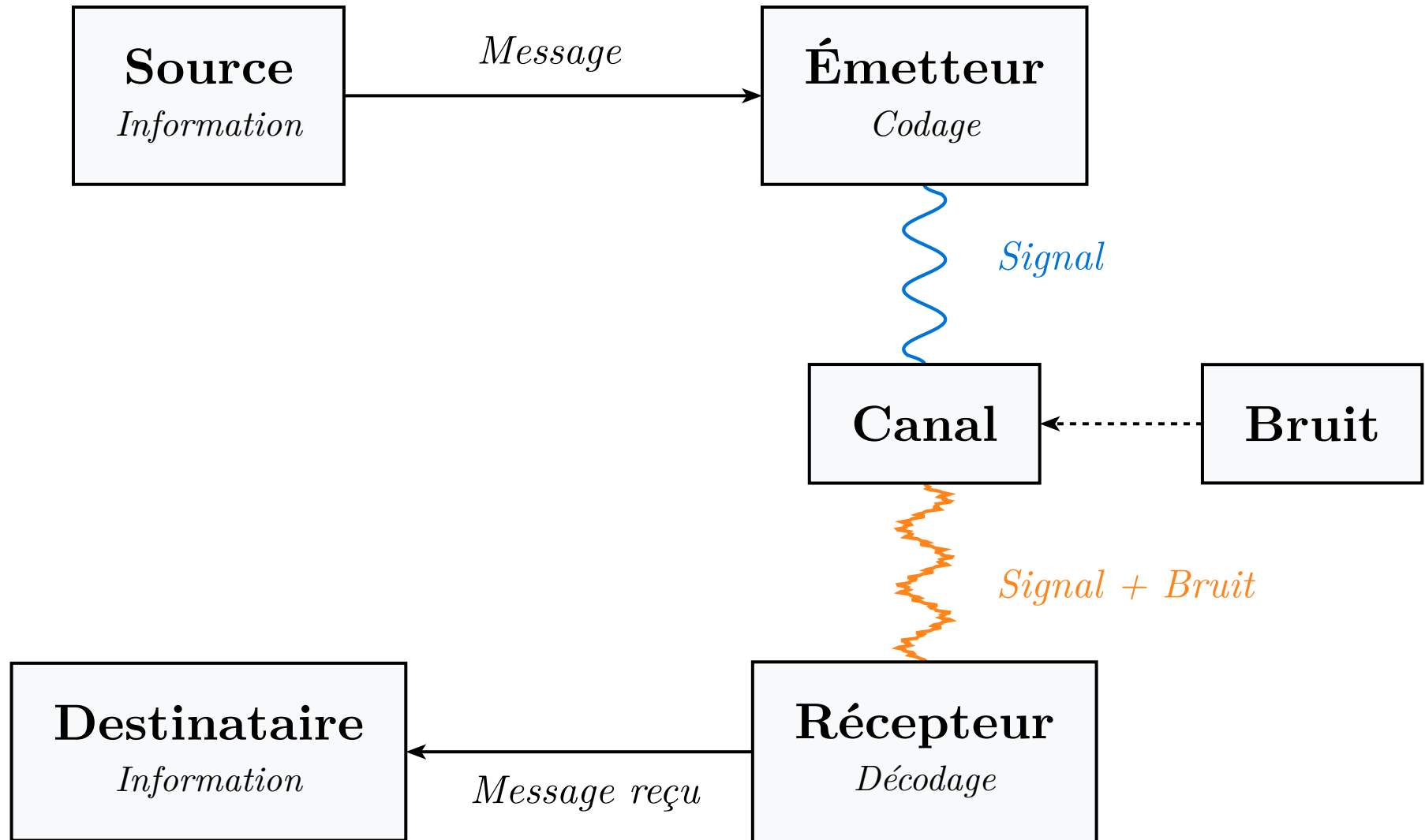
2025 - 2026

Plan

- Introduction
- Codes linéaires
- LDPC
- Codage
- Décodage
- Analyse



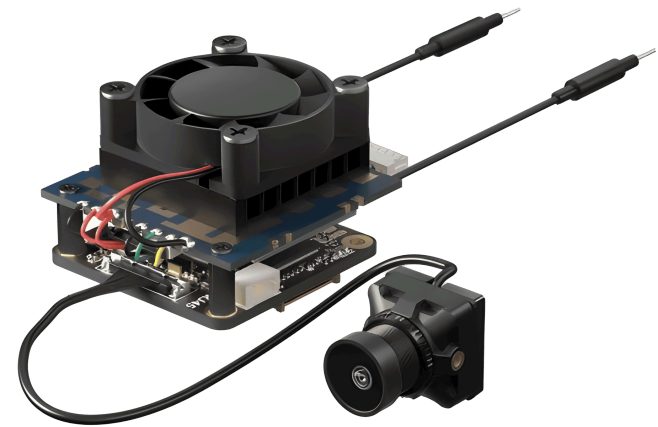
Introduction : Communication Numérique



Introduction : Utilisation



Athena-Fidus



Module OpenIPC

Problématique

Comment utiliser les codes LDPC pour garantir la fiabilité d'une transmission en présence de bruit ?

Définition : Codes Linéaires en Bloc

Code $(n, k) \in \mathbb{N}^2$

\mathcal{C} sous-espace vectoriel de dimension k de \mathbb{F}_2^n

- k : longueur du message original
- n : longueur du mot de code
- $m = n - k$: nombre de bits de parités

Encodage

$\Phi : \mathbb{F}_2^k \rightarrow \mathbb{F}_2^n \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_2^k, \mathbb{F}_2^n)$

Définition : Codes Linéaires en Bloc

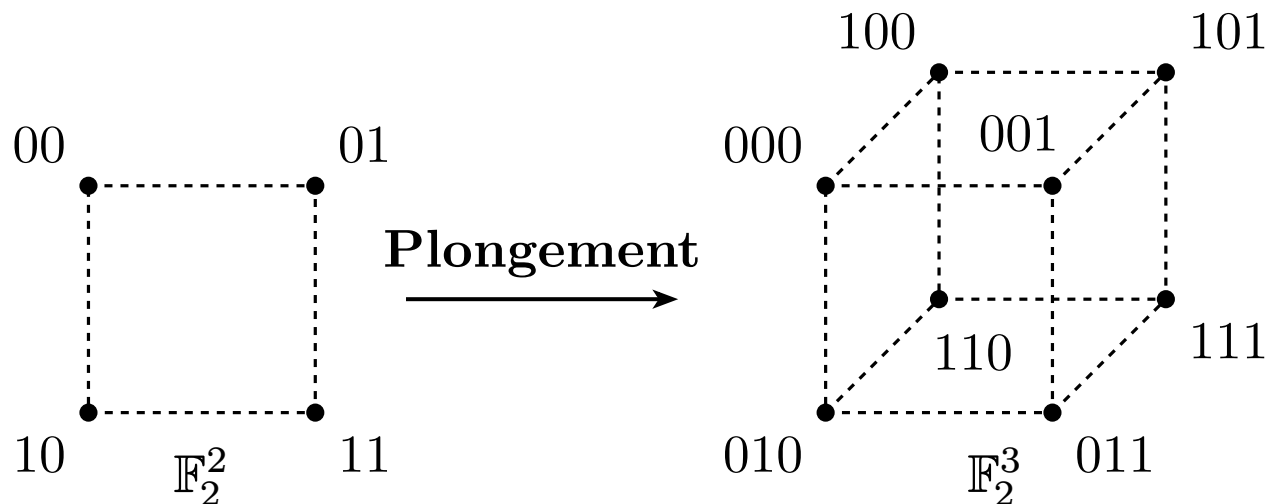
Code $(n, k) \in \mathbb{N}^2$

\mathcal{C} sous-espace vectoriel de dimension k de \mathbb{F}_2^n

- k : longueur du message original
- n : longueur du mot de code
- $m = n - k$: nombre de bits de parités

Encodage

$\Phi : \mathbb{F}_2^k \rightarrow \mathbb{F}_2^n \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_2^k, \mathbb{F}_2^n)$



Définition : Matrice Génératrice

Matrice Génératrice

$G \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F}_2)$ dont les lignes sont une base de \mathcal{C}

Encodage

Pour un message $u \in \mathbb{F}_2^k$ le mot de code $c \in \mathcal{C}$ est :

$$c = \Phi(u) = u \odot G$$

Forme systématique

$$G = [I_k \mid P]$$

- Pour $u \in \mathbb{F}_2^k$, $u \odot G = [u \mid u \odot P]$
- $P \in \mathcal{M}_{k,(n-k)}(\mathbb{F}_2)$ matrice de parité

Définition : Matrice de Contrôle

Matrice de Contrôle

$$H = [P^\top \mid I_{n-k}]$$

- $\mathcal{C} = \ker(H) = \{v \in \mathbb{F}_2^n \mid H \odot v^\top = 0\}$
- $G \odot H^\top = 0$

Syndrome

Pour un vecteur reçu $r = c + e$, $s \in \mathbb{F}_2^{n-k}$

$$s = Hr^\top = Hc^\top + He^\top = 0 + He^\top$$

- Si $s = 0$, r est un mot de code valide
- Sinon s donne la signature de l'erreur e

Exemple d'un code linéaire

Exemple d'un code (5, 2)

- On choisit la matrice de parité P :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Alors la matrice génératrice G est :

$$G = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

- Message $u = [1 \ 1]$
- Mot de code $c = uG$:

$$c = [1 \ 1] \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Exemple d'une code linéaire

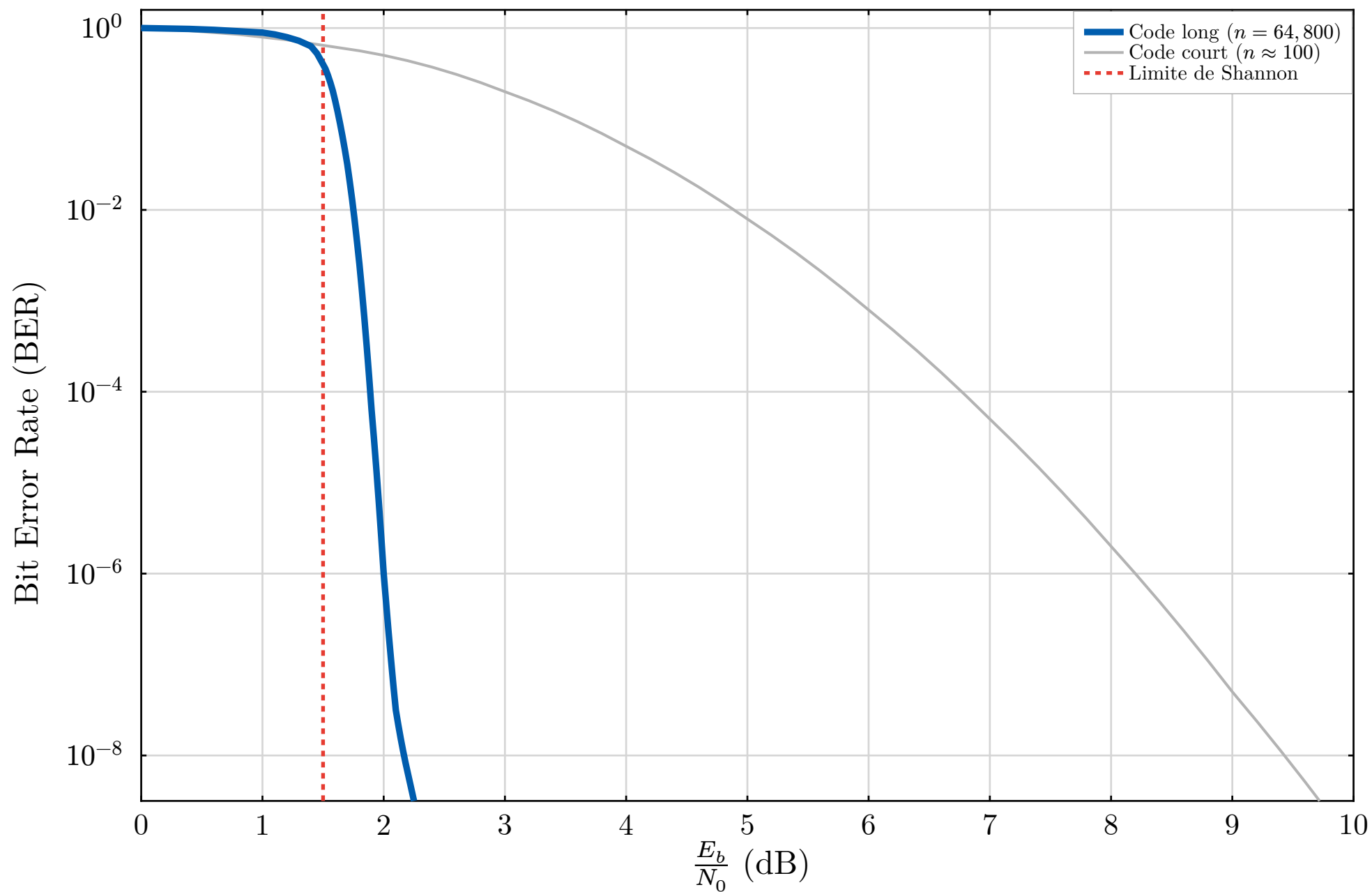
Enfin

$$H = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Vérification du mot de code $c = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$

$$Hc^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]^{\top} = \begin{bmatrix} 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \\ 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Approcher la Limite de Shannon



Le Mur de la Complexité

Décodage par Maximum de Vraisemblance (MDL)

Chercher le mot de code $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ le plus probable sachant \mathbf{r} reçu :

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}} d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c})$$

- Équivalent à chercher l'erreur \mathbf{e} de poids minimal tel que $\mathbf{H}\mathbf{e}^\top = \mathbf{s}$.

Le Problème du décodage par Syndrome

NP-Difficile et pour H quelconque : $\mathcal{O}(2^k)$

- Pour $k = 100$ bits, $2^{100} \approx 10^{30}$ opérations nécessaires.

Définition des Codes LDPC

Formalisation des Codes LDPC Réguliers

Code linéaire en bloc avec une matrice de contrôle \mathbf{H} est clairsemée.

- Poids de Colonne w_c
- Poids de Ligne w_r

Conditions de Faible Densité

$$w_c \ll n - k \qquad w_r \ll n$$

Rendement

$$R = \frac{n - \text{rg}(\mathbf{H})}{n} \geq 1 - \frac{m}{n}$$

Matrice de contrôle

Code LDPC (6, 3)

$$mw_r = nw_c \text{ donc } H \in \mathcal{M}_{15,30}(\mathbb{F}_2) \text{ et } R = 1 - \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

The diagram shows a 2D point cloud within large square brackets. A horizontal light blue band is labeled $w_r = 6$ on the right. A vertical light orange band is labeled $w_c = 3$ at the top. The intersection of these bands is shaded gray. The point cloud contains many small gray dots. Three orange dots are located on the vertical orange band, and five blue dots are located on the horizontal blue band. To the left of the brackets is the letter H , and to the right is the label $w_r = 6$.

De la Matrice aux Équations de Parité

$$H = \begin{bmatrix} \text{---} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \text{---} \\ \bullet & & & & & & & \\ & \bullet & & & & & & \\ & & \bullet & & & & & \\ & & & \bullet & & & & \\ & & & & \bullet & & & \\ & & & & & \bullet & & \\ & & & & & & \bullet & \\ & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{29} \end{bmatrix}$$

Mot reçu $r \in \mathbb{F}_2^{30}$

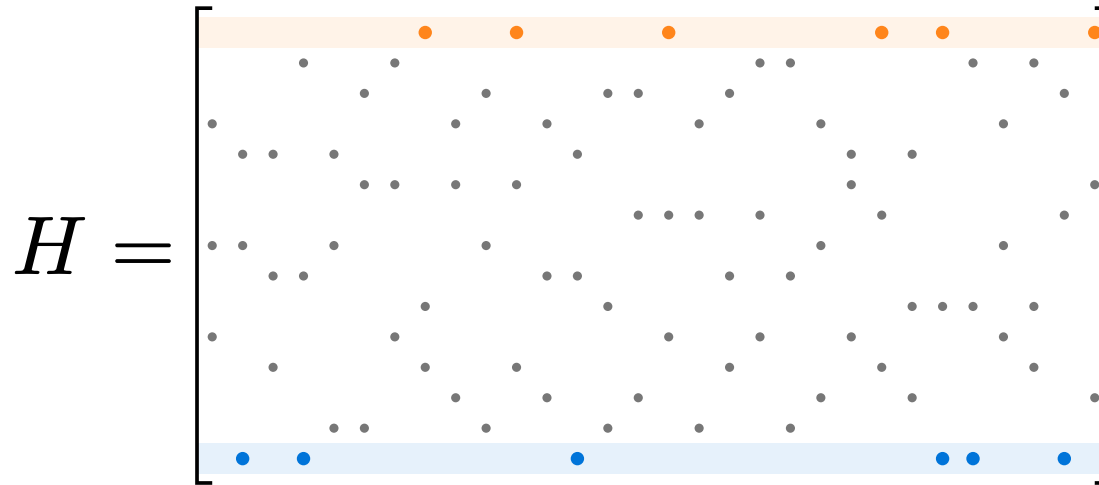
- Chaque ligne j de H définit une équation de parité f_j .
- Pour r , on vérifie le syndrome : $Hr^\top = 0$.

Équations de Parité

$$f_0 : r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{15} \oplus r_{22} \oplus r_{24} \oplus r_{29} = 0$$

- Si $f_j = 1$, un nombre impair de bits a été inversé par le canal.

L'Entrelacement des Contraintes



- Chaque bit r_i participe à $w_c = 3$ équations distinctes

$$\begin{cases} r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{15} \oplus r_{22} \oplus r_{24} \oplus r_{29} = 0 \\ \vdots \\ r_1 \oplus r_3 \oplus r_{12} \oplus r_{24} \oplus r_{25} \oplus r_{28} = 0 \end{cases}$$

- r_{24} : Surveillé par f_0 et f_{14} .
- Si $f_0 = 1$ et $f_{14} = 1$, r_{24} est suspect

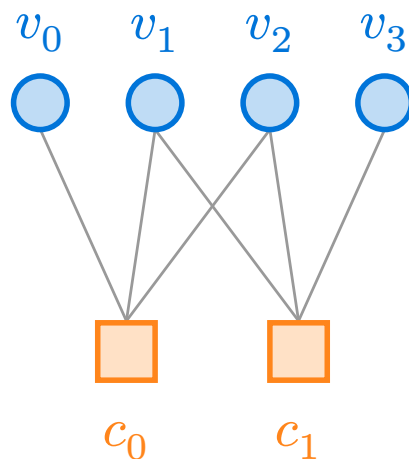
Graphe de Tanner : Définition

Graphe de Tanner $\mathcal{G}(H)$

Graphe bipartite $\mathcal{G} = (V \sqcup C, E)$:

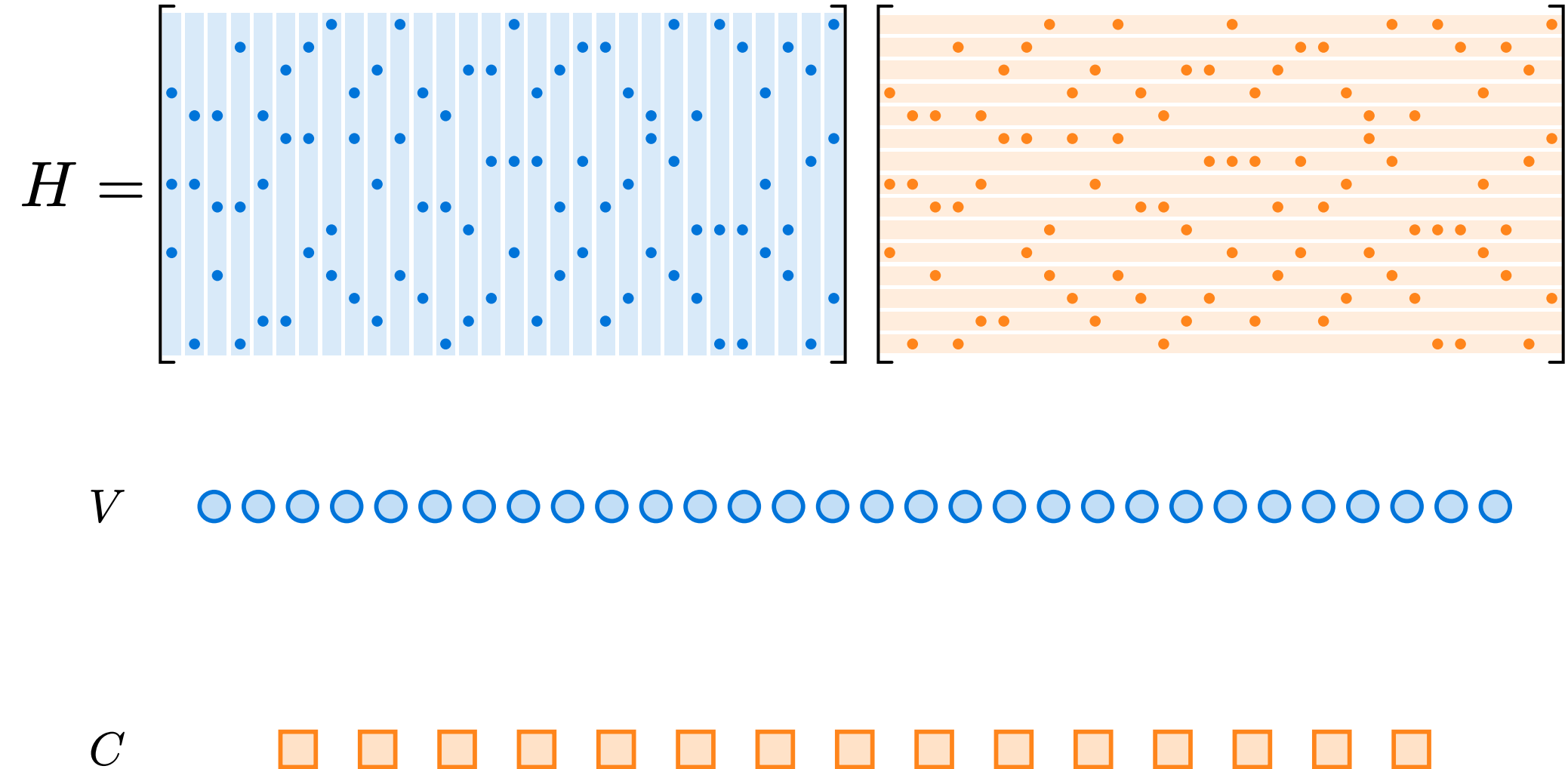
$$(v_j, c_i) \in E \iff H_{i,j} = 1$$

- $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ nœuds de **variable**
- $C = \{c_0, \dots, c_{m-1}\}$ nœuds de **contrôle**
- $\deg(v_j) = w_c$
- $|E| = n \cdot w_c = m \cdot w_r$
- $H \cong \mathcal{G}$
- $\deg(c_i) = w_r$

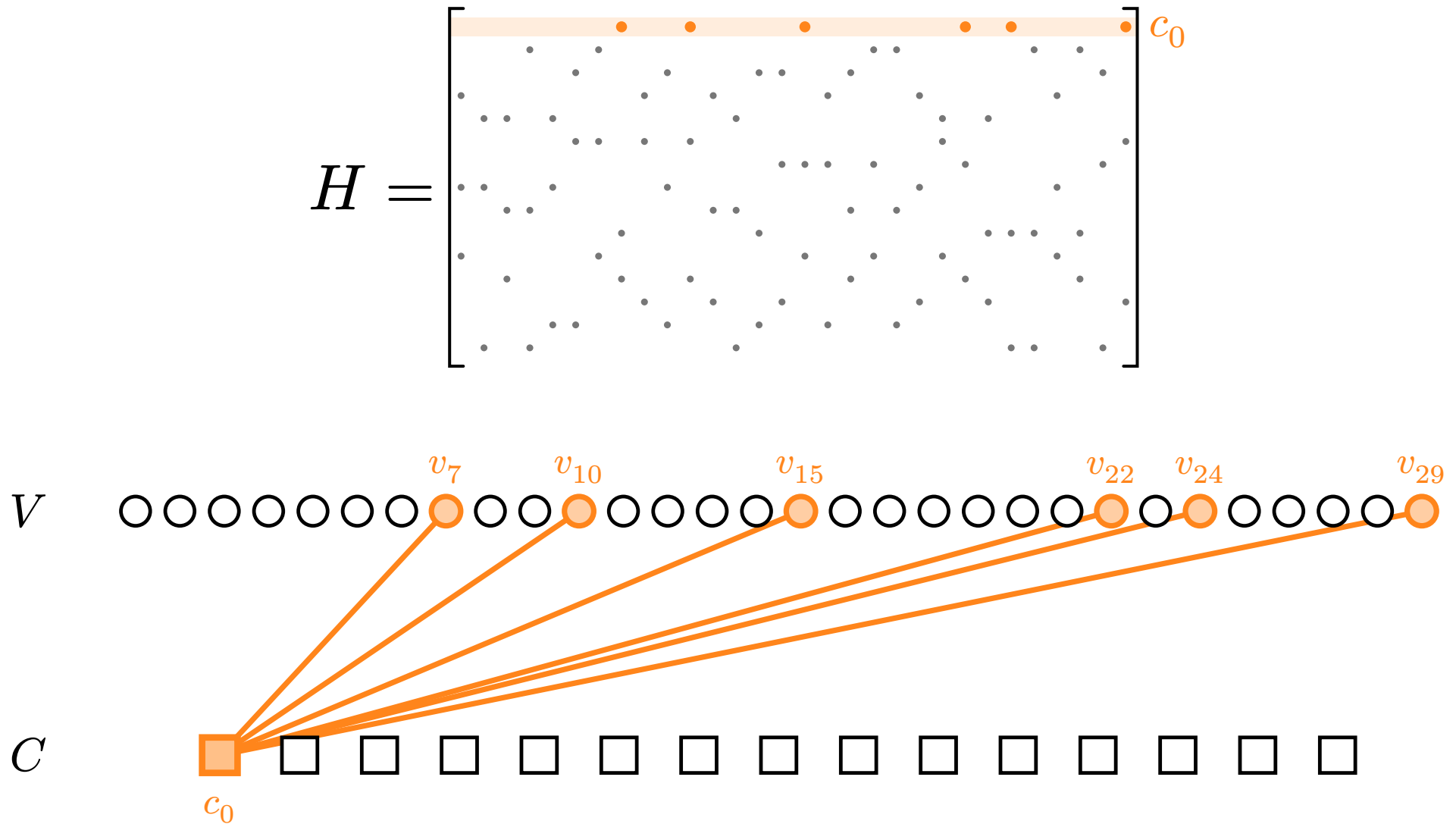


Exemple $n = 4, m = 2$

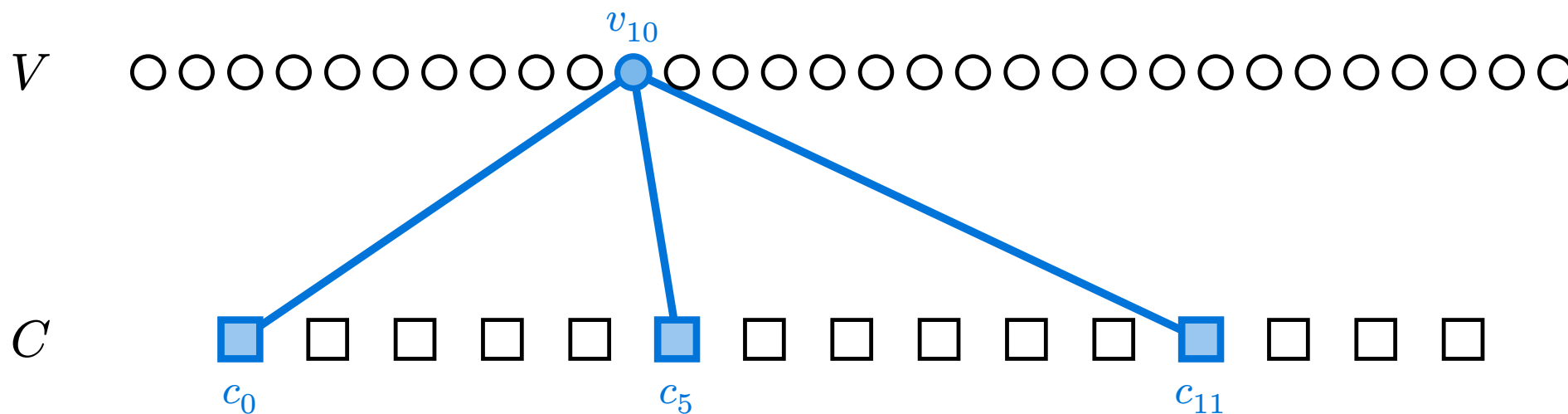
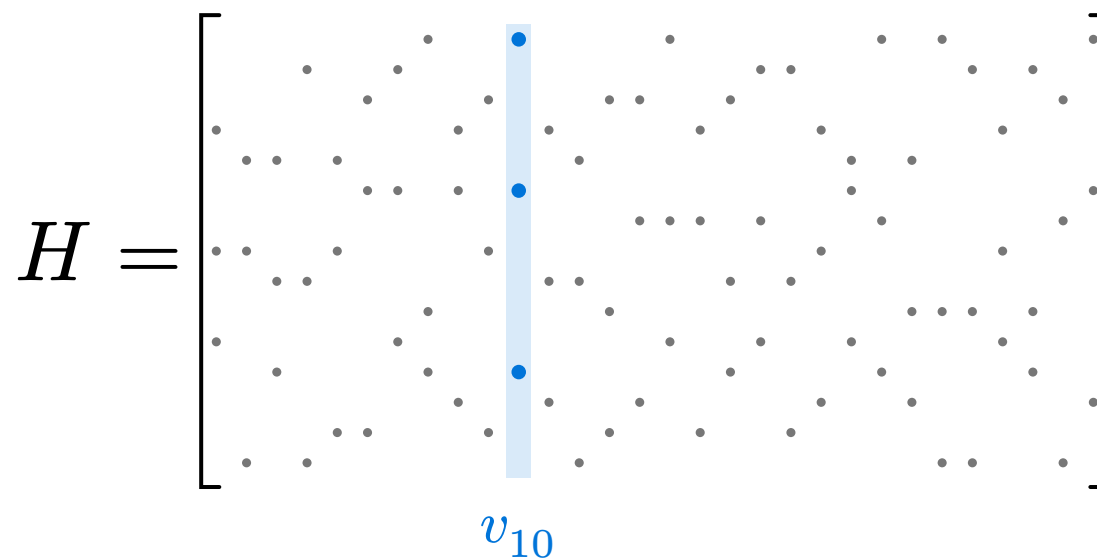
Construction du Graphe : Les Nœuds



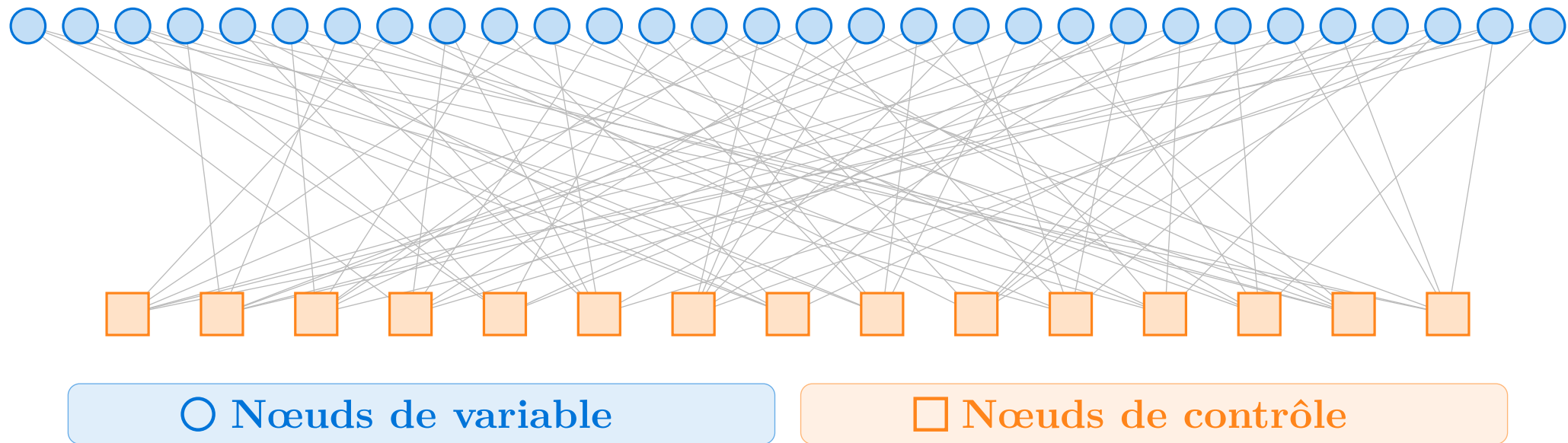
Construction du Graphe : Nœud de Contrôle



Construction du Graphe : Nœud de Variable



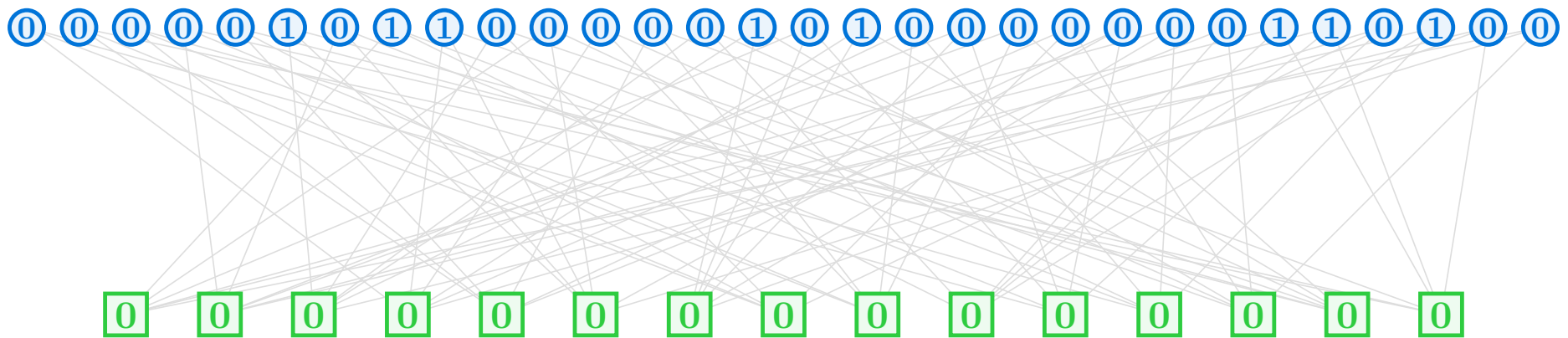
Graphe de Tanner Final





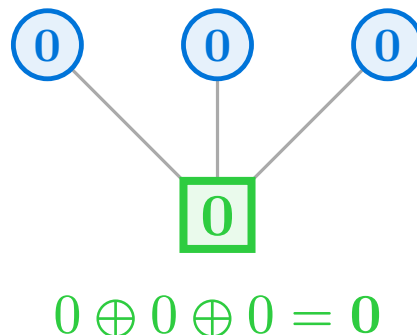
La Contrainte de Somme Nulle

Vision Graphe

Si $s = 0$ alors que chaque nœud de contrôle est localement satisfait

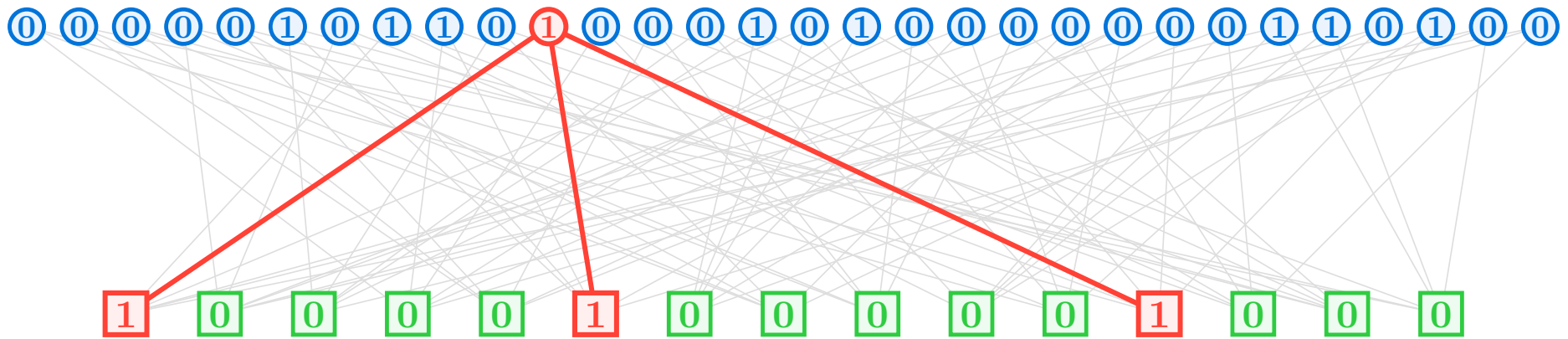


Chaque  calcule le xor de ses voisins  : $f_i = \bigoplus_{j \in \mathcal{N}(c_i)} v_j$

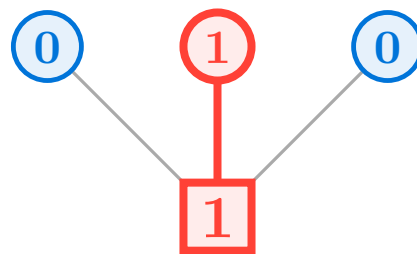


Détection d'Erreur

Si un bit est inversé, toutes les contraintes associées sont à 1



$$0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \rightarrow \text{Erreur détectée}$$



$$0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

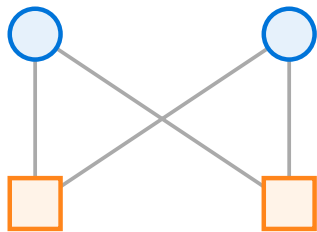
La Topologie de H : Le Girth

Définition : Le Girth (La Maille)

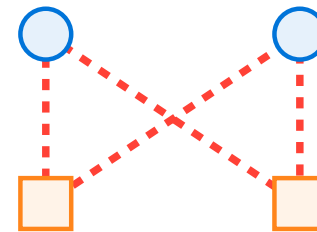
Longueur du plus court cycle dans le graphe de Tanner

- Le girth est **pair**
- La valeur minimale est $g = 4$.

Girth élevé \Rightarrow Meilleure diffusion de l'information.



Graphe de Tanner



4-Cycle

Encodage

Décodage

Canal d'étude (AWGN) analogique, tension etc, ce qui se passe en radio dans les câbles etc

Hard decoding

Nul (0 ou 1) transition perte d'information

Implementation

Soft decoding

belief propagation, log ou virgule fixe, explication resultat meilleur

Implementation

Test

Irl hackrf, test de diff de debit avec des paquets

Image

Test de transmission d'image avec différent ldpc non opti et opti (le H)

Annexe



Théorie derrière la définition des codes linaires

Poser les notations algébriques etc...

Decodage par maximum de vraisemblance

Expliquer, quelle distance ? etc

Code LDPC non régulier

tt

f