



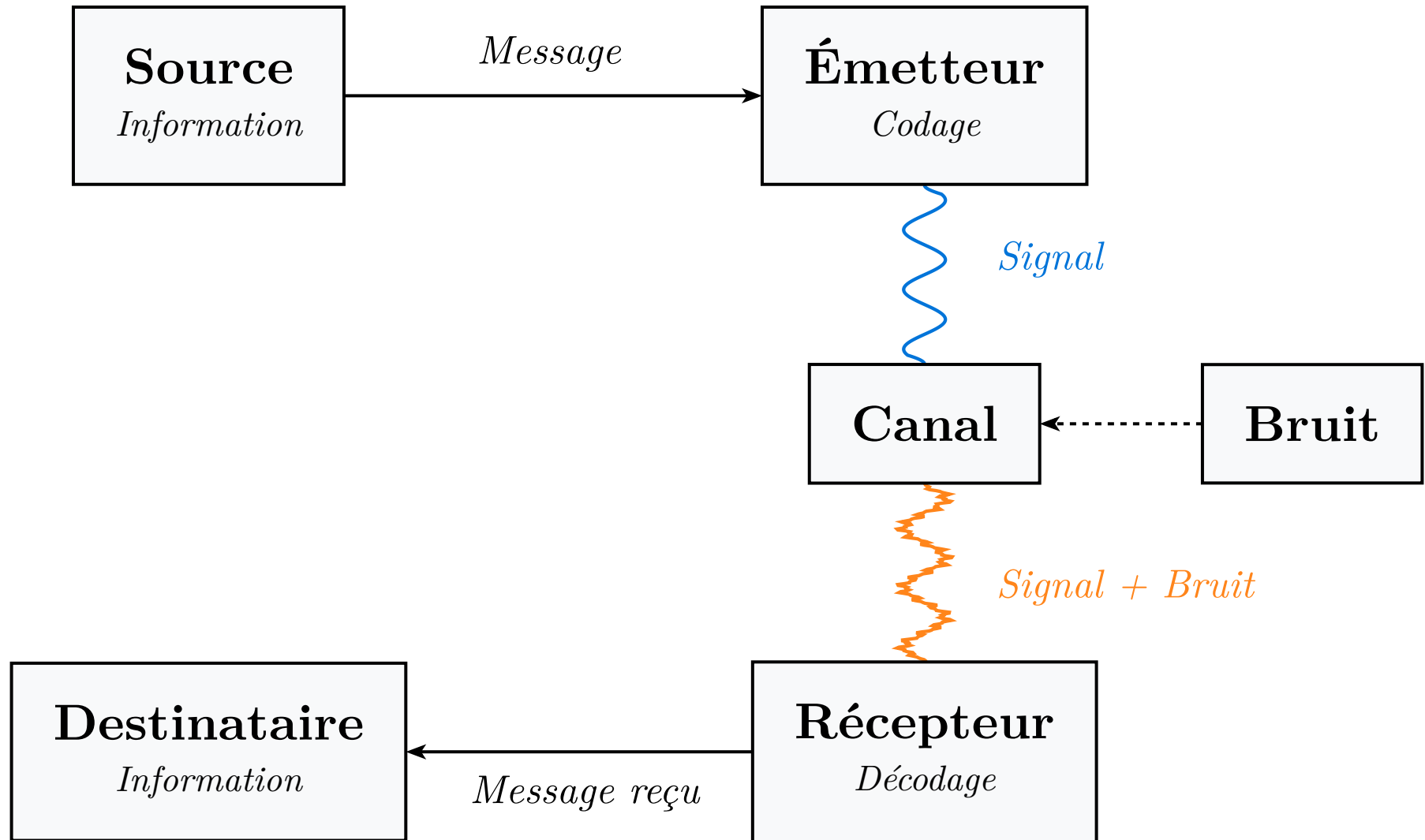
# Codes LDPC

**Anthony PERRONI**

n°49871

2025 - 2026

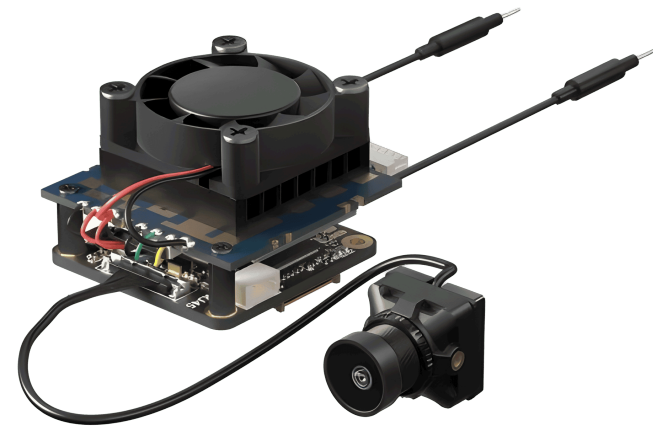
# Introduction : Communication Numérique



# Introduction : Utilisation



Athena-Fidus



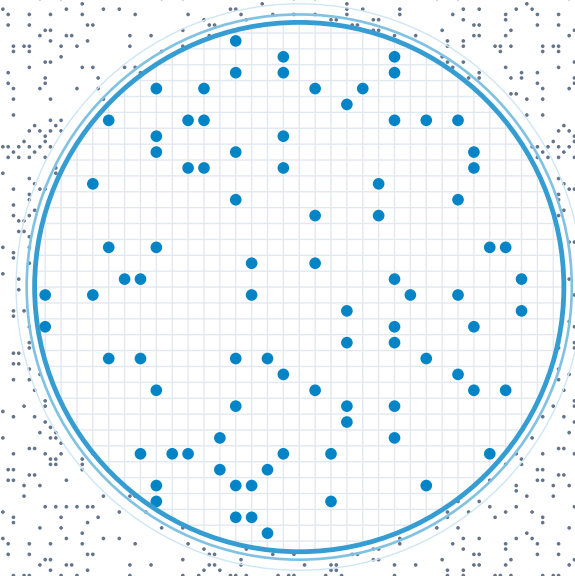
Module OpenIPC

# Problématique

**Comment utiliser les codes LDPC pour garantir la fiabilité d'une transmission en présence de bruit ?**

# Plan

- Introduction
- Codes linéaires
- LDPC
- Codage
- Décodage
- Analyse



# Définition : Codes Linéaires en Bloc

Code  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$

$\mathcal{C}$  sous-espace vectoriel de dimension  $k$  de  $\mathbb{F}_2^n$

- $k$  : longueur du message original
- $n$  : longueur du mot de code
- $m = n - k$  : nombre de bits de parités

Encodage

$\Phi : \mathbb{F}_2^k \rightarrow \mathbb{F}_2^n \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_2^k, \mathbb{F}_2^n)$

# Définition : Matrice Génératrice

## Matrice Génératrice

$G \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F}_2)$  dont les lignes sont une base de  $\mathcal{C}$

## Encodage

Pour un message  $u \in \mathbb{F}_2^k$  le mot de code  $c \in \mathcal{C}$  est :

$$c = \Phi(u) = u \odot G$$

## Forme systématique

$$G = \left[ \begin{array}{c|c} I_k & P \end{array} \right]$$

- $P \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{F}_2)$  matrice de parité

# Définition : Matrice de Contrôle

## Matrice de Contrôle

$$H = \begin{bmatrix} P^\top & I_{n-k} \end{bmatrix}$$

- $\mathcal{C} = \ker(H) - Hc^\top = 0 \Rightarrow c$  mot de code valide

## Syndrome

Pour un vecteur reçu  $r = c + e$ ,  $s \in \mathbb{F}_2^{n-k}$

$$s = Hr^\top = Hc^\top + He^\top = 0 + He^\top$$

- $s = 0 \Rightarrow r$  mot de code valide
- $s \neq 0$  donne la signature de l'erreur  $e$



# Exemple d'un code linéaire

## Exemple d'un code (5, 2)

- On choisit la matrice de parité  $P$  :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Alors la matrice génératrice  $G$  est :

$$G = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

- Message  $u = [1 \ 1]$
- Mot de code  $c = uG$  :

$$c = [1 \ 1] \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$$

# Exemple d'un code linéaire

Structure systématique de  $H$  :

$$H = \left[ \begin{array}{c|c} P^\top & I_3 \end{array} \right]$$

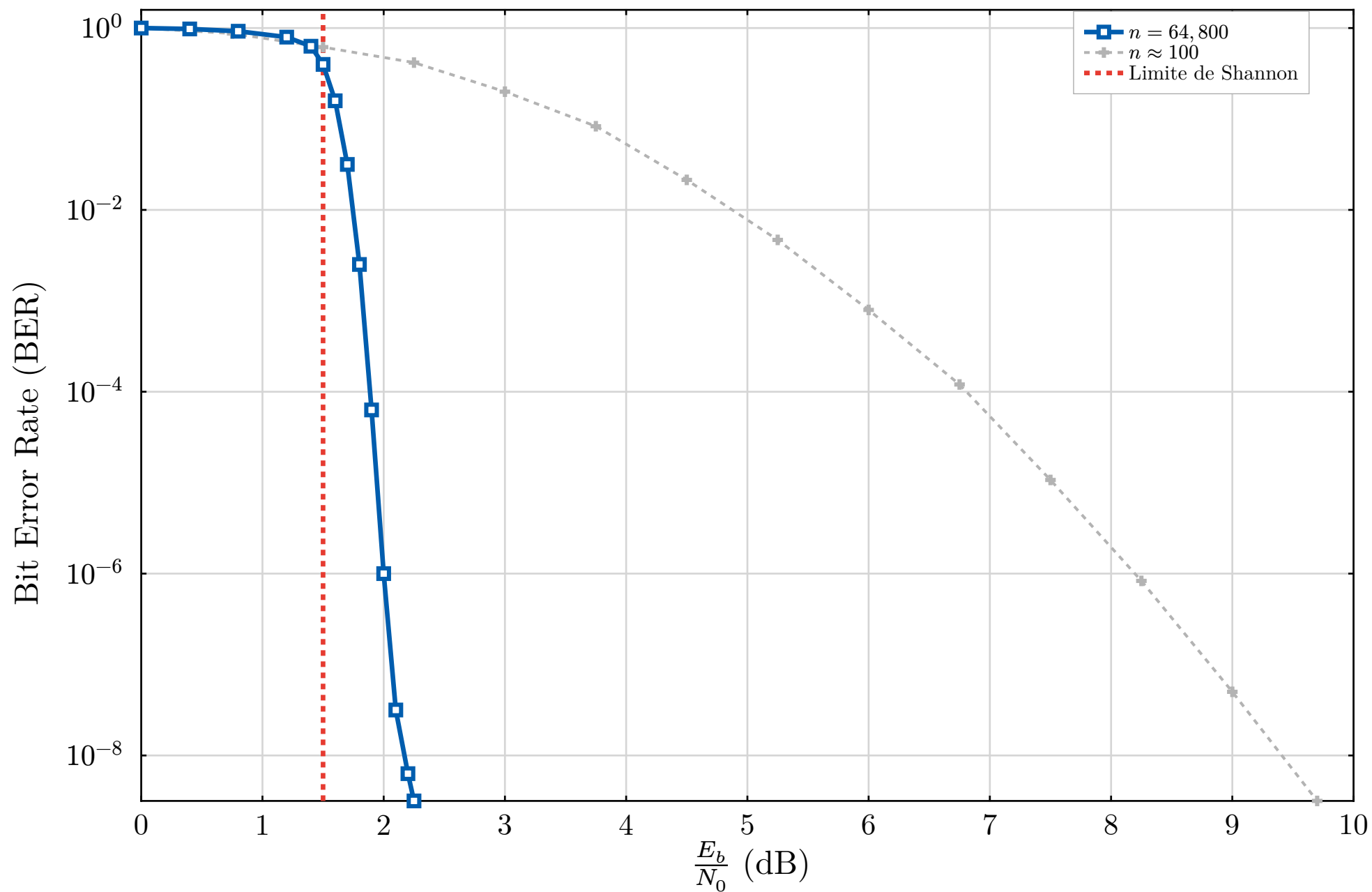
Ainsi :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérification du mot de code  $c = (1, 1, 1, 0, 1)$  :

$$Hc^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]^\top = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Approcher la Limite de Shannon



# Le Mur de la Complexité

## Décodage par Maximum de Vraisemblance

Chercher le mot de code  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$  le plus probable sachant  $\mathbf{r}$  reçu :

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}} d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c})$$

- Équivalent à chercher l'erreur  $\mathbf{e}$  de poids minimal tel que  $\mathbf{H}\mathbf{e}^\top = \mathbf{s}$ .

## Le Problème du décodage par Syndrome

NP-Difficile et pour  $H$  quelconque :  $\mathcal{O}(2^k)$

# Définition des Codes LDPC

## Codes LDPC Réguliers

Code linéaire en bloc avec une matrice de contrôle  $H$  clairsemée.

- Poids de Colonne  $w_c$
- Poids de Ligne  $w_r$

## Conditions de Faible Densité

$$w_c \ll n - k \qquad w_r \ll n$$

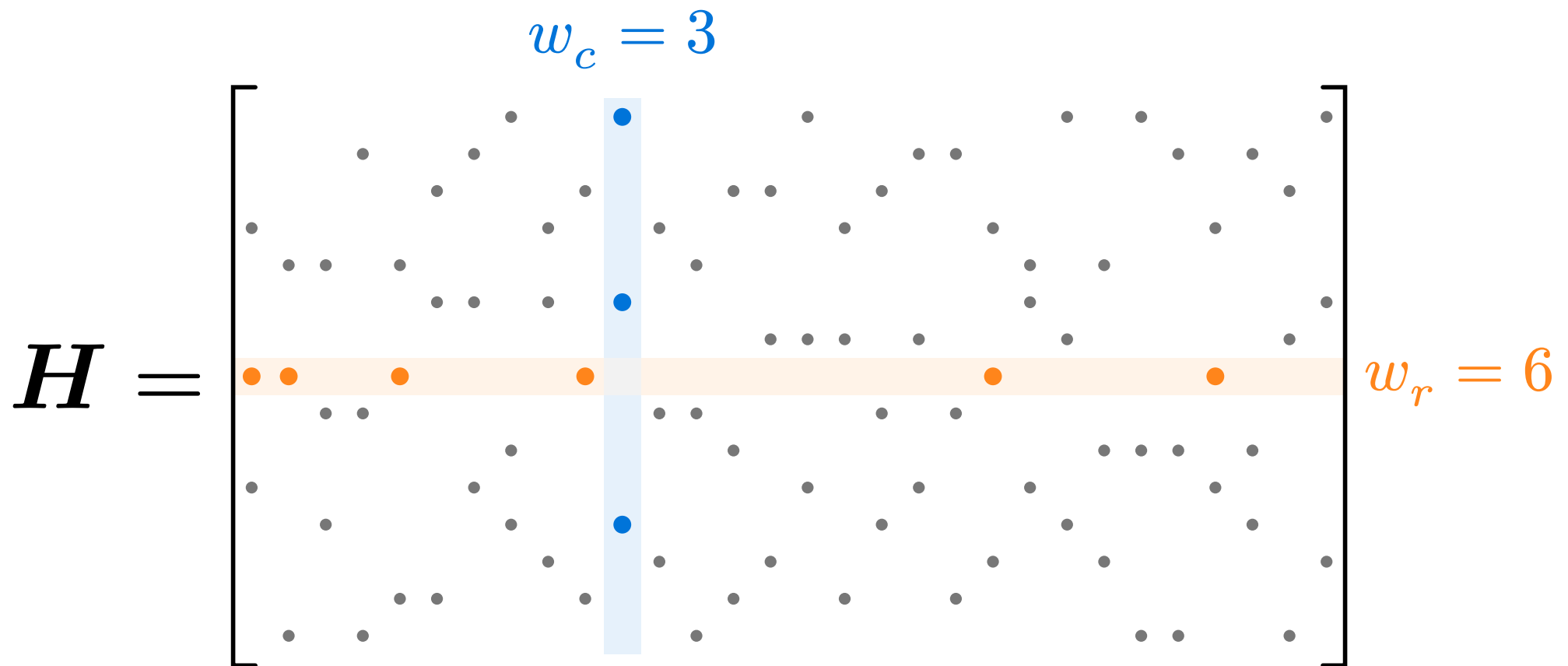
## Rendement

$$R = 1 - \frac{m}{n}$$

# Matrice de contrôle

Code LDPC (6, 3)

$$H \in \mathcal{M}_{15,30}(\mathbb{F}_2) \text{ et } R = \frac{1}{2}$$



# De la Matrice aux Équations de Parité

$$H = \begin{bmatrix} \text{matrix of dots} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{29} \end{bmatrix}$$

Mot reçu  $r \in \mathbb{F}_2^{30}$

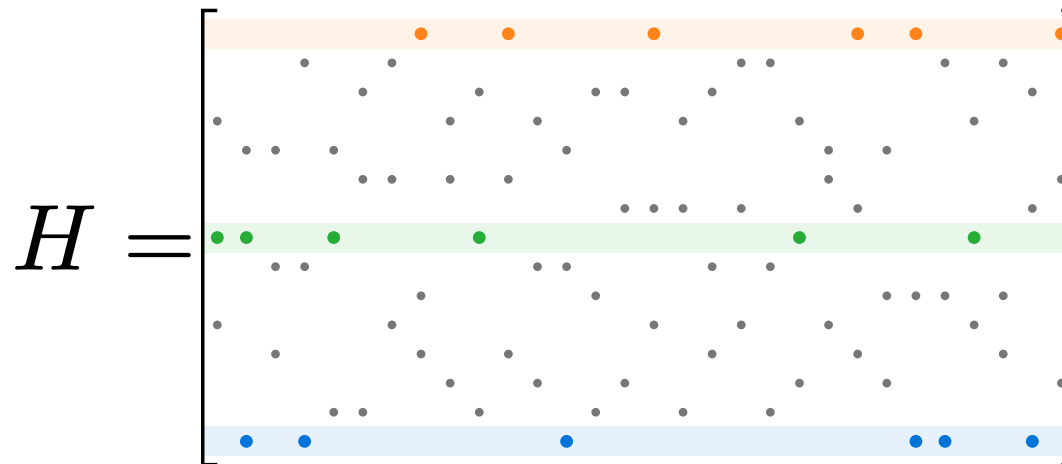
- $L_j$  définit une équation de parité  $f_j$
- Pour  $r$ , on vérifie le syndrome :  $Hr^\top = 0$

## Équations de Parité

$$f_0 : r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{15} \oplus r_{22} \oplus r_{24} \oplus r_{29} = 0$$

- Si  $f_j = 1$ , un nombre impair de bits a été inversé par le canal.

# L'Entrelacement des Contraintes



- Chaque bit  $r_i$  participe à  $w_c = 3$  équations distinctes :

$$\begin{cases} r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{15} \oplus r_{22} \oplus r_{24} \oplus r_{29} = 0 & (f_0) \\ r_0 \oplus r_1 \oplus r_4 \oplus r_9 \oplus r_{20} \oplus r_{26} = 0 & (f_7) \\ r_1 \oplus r_3 \oplus r_{12} \oplus r_{24} \oplus r_{25} \oplus r_{28} = 0 & (f_{14}) \end{cases}$$

- $r_{24}$  : Surveillé simultanément par  $f_0$ ,  $f_7$  et  $f_{14}$ .
- Si  $\forall j \in \{0, 7, 24\}$ ,  $f_j = 1$ , alors le bit est comme suspect.



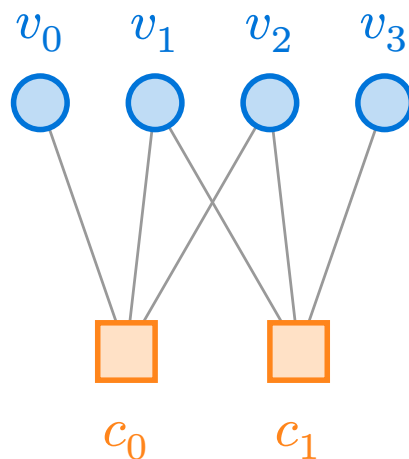
# Graphe de Tanner : Définition

## Graphe de Tanner $\mathcal{G}(H)$

Graphe bipartite  $\mathcal{G} = (V \sqcup C, A)$  :

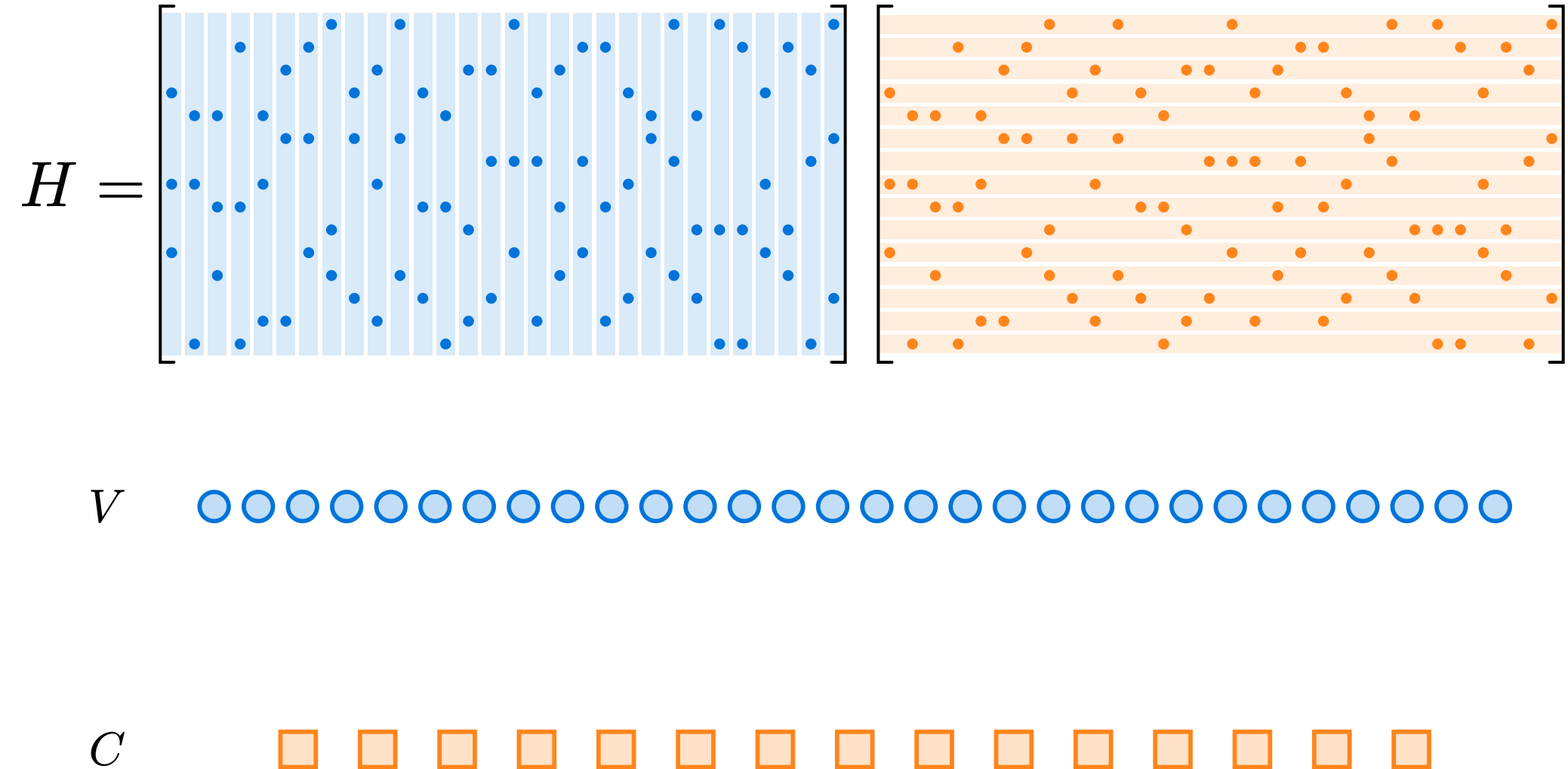
$$(v_j, c_i) \in A \iff H_{i,j} = 1$$

- $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  nœuds de **variable**
- $C = \{c_0, \dots, c_{m-1}\}$  nœuds de **contrôle**
- $\deg(v_j) = w_c$
- $|A| = n \cdot w_c = m \cdot w_r$
- $H \cong \mathcal{G}$
- $\deg(c_i) = w_r$

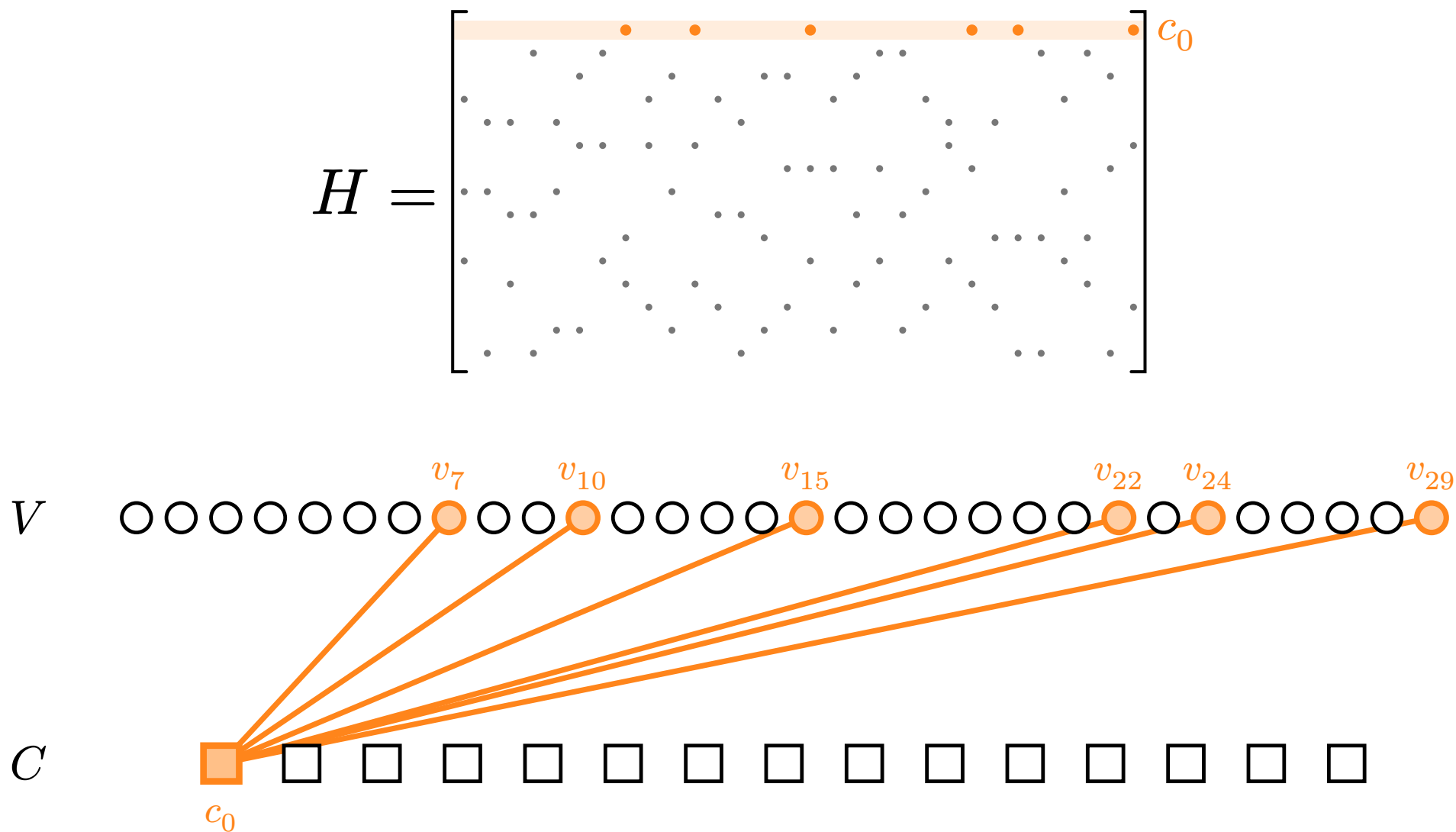


*Exemple  $n = 4, m = 2$*

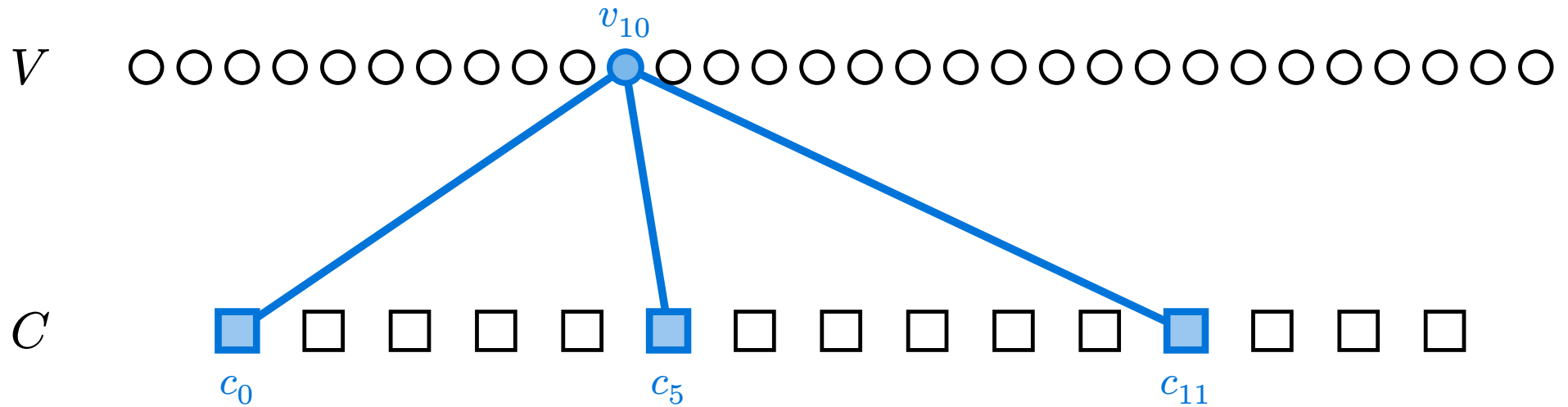
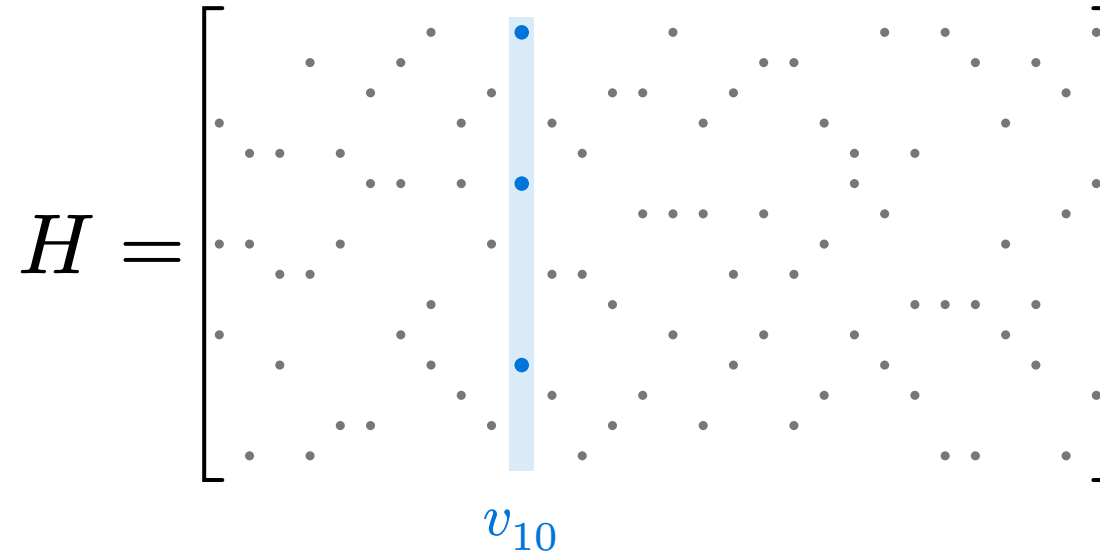
# Construction du Graphe : Les Nœuds



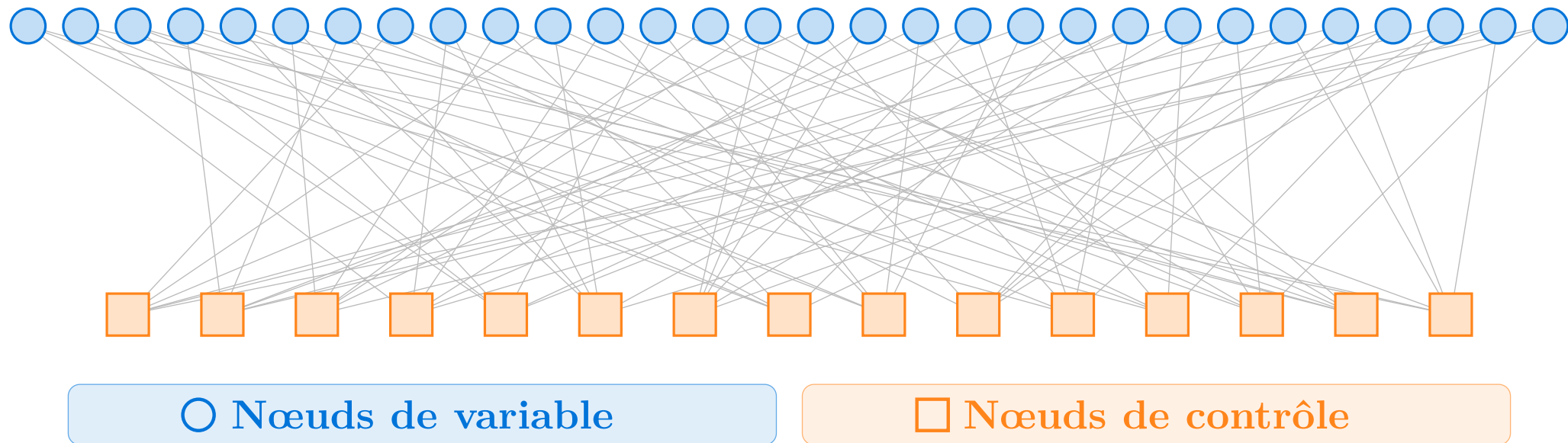
# Construction du Graphe : Nœud de Contrôle



## Construction du Graphe : Nœud de Variable



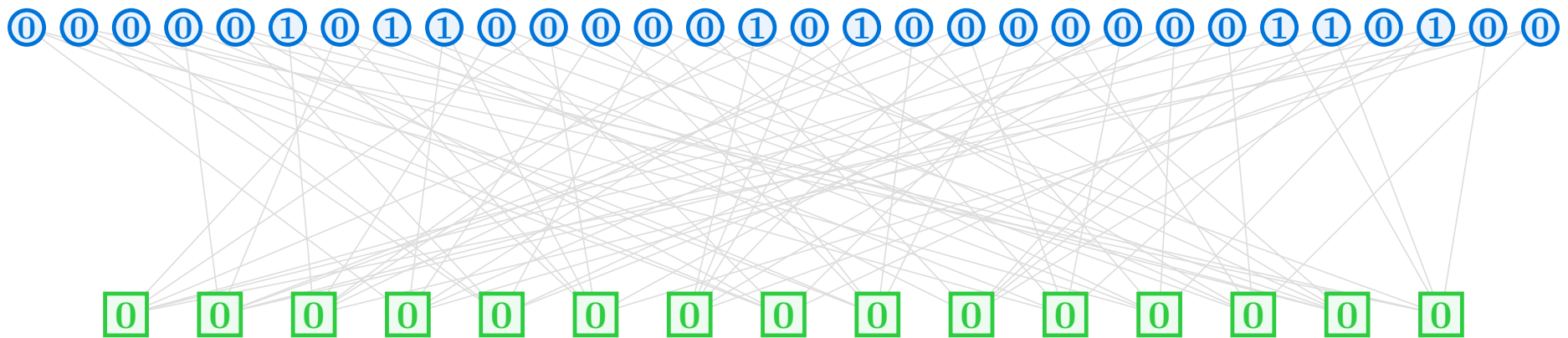
# Graphe de Tanner Final





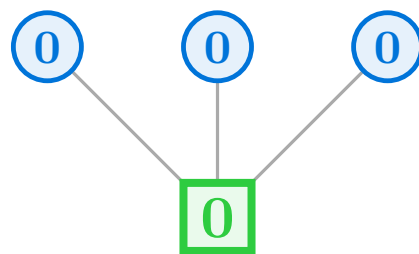
# La Contrainte de Somme Nulle

## Vision Graphe

Si  $s = 0$  alors que chaque nœud de contrôle est localement satisfait



Chaque  calcule le xor de ses voisins  :  $f_i = \bigoplus_{j \in \mathcal{N}(c_i)} v_j$

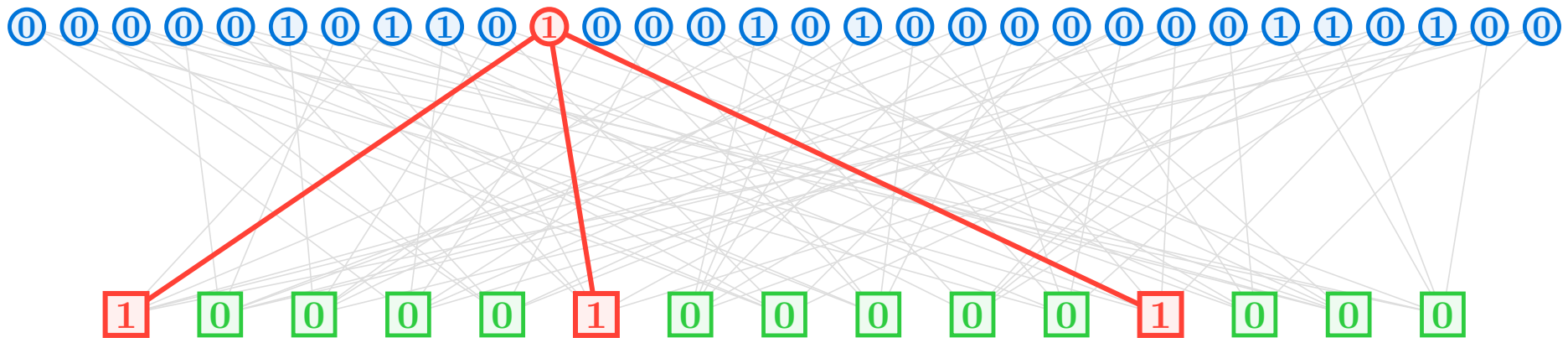


$$0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

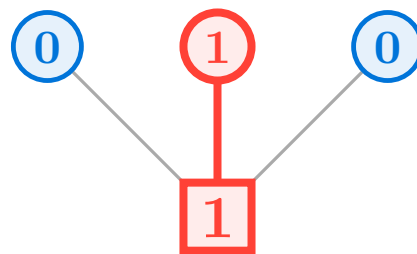
# La Contrainte de Somme Nulle

## Détection d'Erreur

Si un bit est inversé, toutes les contraintes associées sont à 1



$$0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \rightarrow \text{Erreur détectée}$$



$$0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

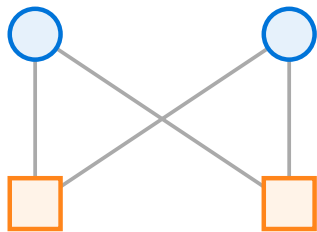
# La Topologie de H : Le Girth

## Définition : Le Girth (La Maille)

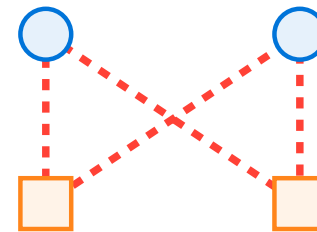
Longueur du plus court cycle dans le graphe de Tanner

- Le girth est **pair**
- La valeur minimale est  $g = 4$ .

Girth élevé  $\Rightarrow$  Meilleure diffusion de l'information.



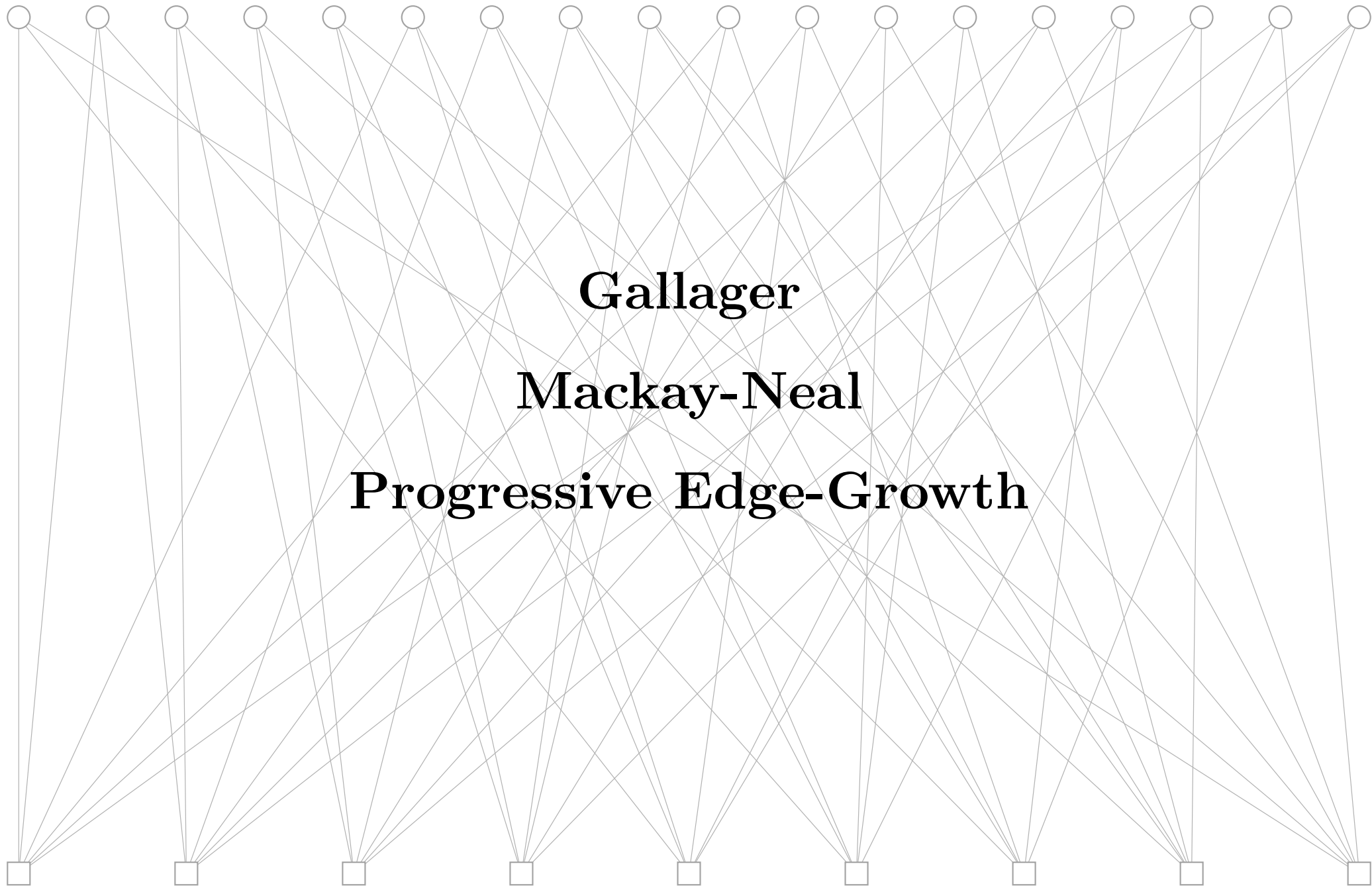
*Graphe de Tanner*



**4-Cycle**



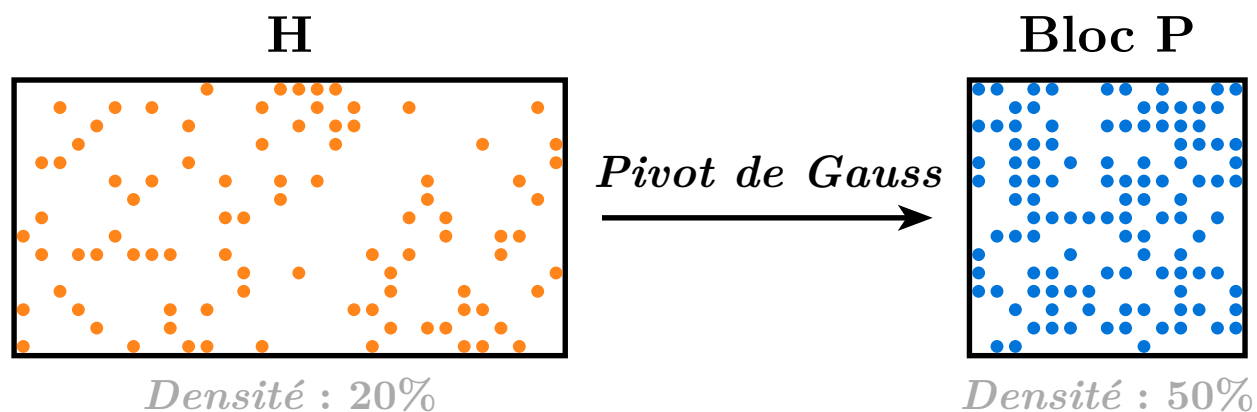
# Méthode de génération de H



# Encodage LDPC : Calcul de G

## Encodage

Mot de code  $\mathbf{c}$  généré à partir d'un message  $\mathbf{u}$  :  $\mathbf{c} = \mathbf{u}\mathbf{G}$



- Forme Systématique

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^\top & \mathbf{I}_{n-k} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{P} \end{bmatrix}$$




- La matrice  $\mathbf{G}$  devient dense  $\Rightarrow$  encodage en  $\mathcal{O}(n^2)$

# Décodage : Bit-Flipping

## Décision Stricte (Hard Decision)

Algorithme **itératif** : les nœuds **échangent des bits** pour localiser les erreurs.

## Message Passing




-  envoie son bit courant à ses voisins 
  -  renvoie son **verdict de parité** (0 ou 1)
- 
- Si  $v_j$  participe à **trop d'équations non satisfaites**  $\Rightarrow$  on l'inverse.

# Décodage : Bit-Flipping

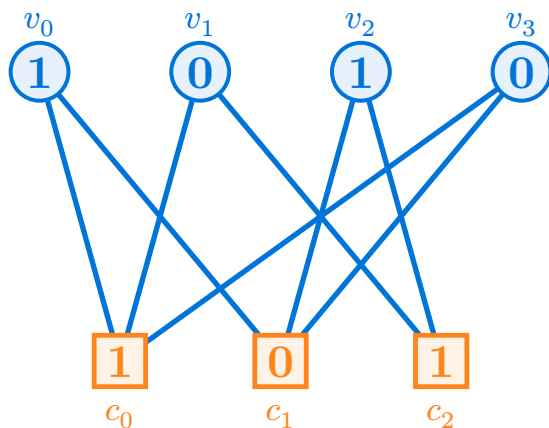
## Décision Stricte (Hard Decision)

Algorithme **itératif** : les nœuds **échangent des bits** pour localiser les erreurs.

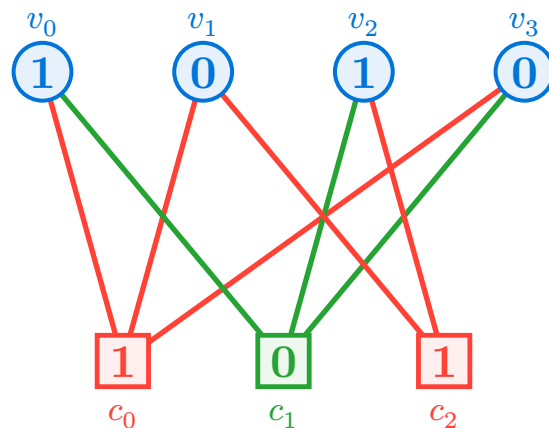
## Message Passing

-  envoie son bit courant à ses voisins 
-  renvoie son **verdict de parité** (0 ou 1)

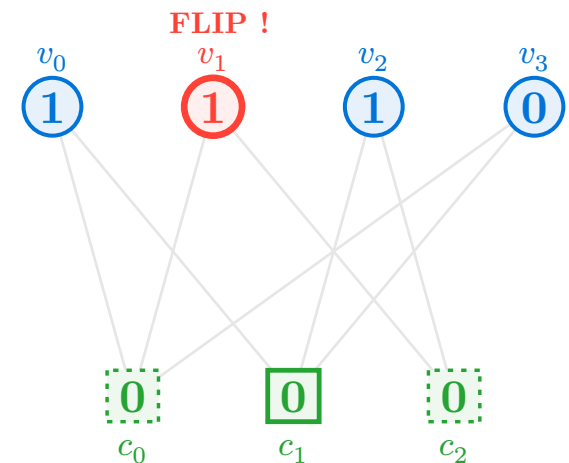
- Si  $v_j$  participe à **trop d'équations non satisfaites**  $\Rightarrow$  on l'inverse.



$VN \rightarrow CN$

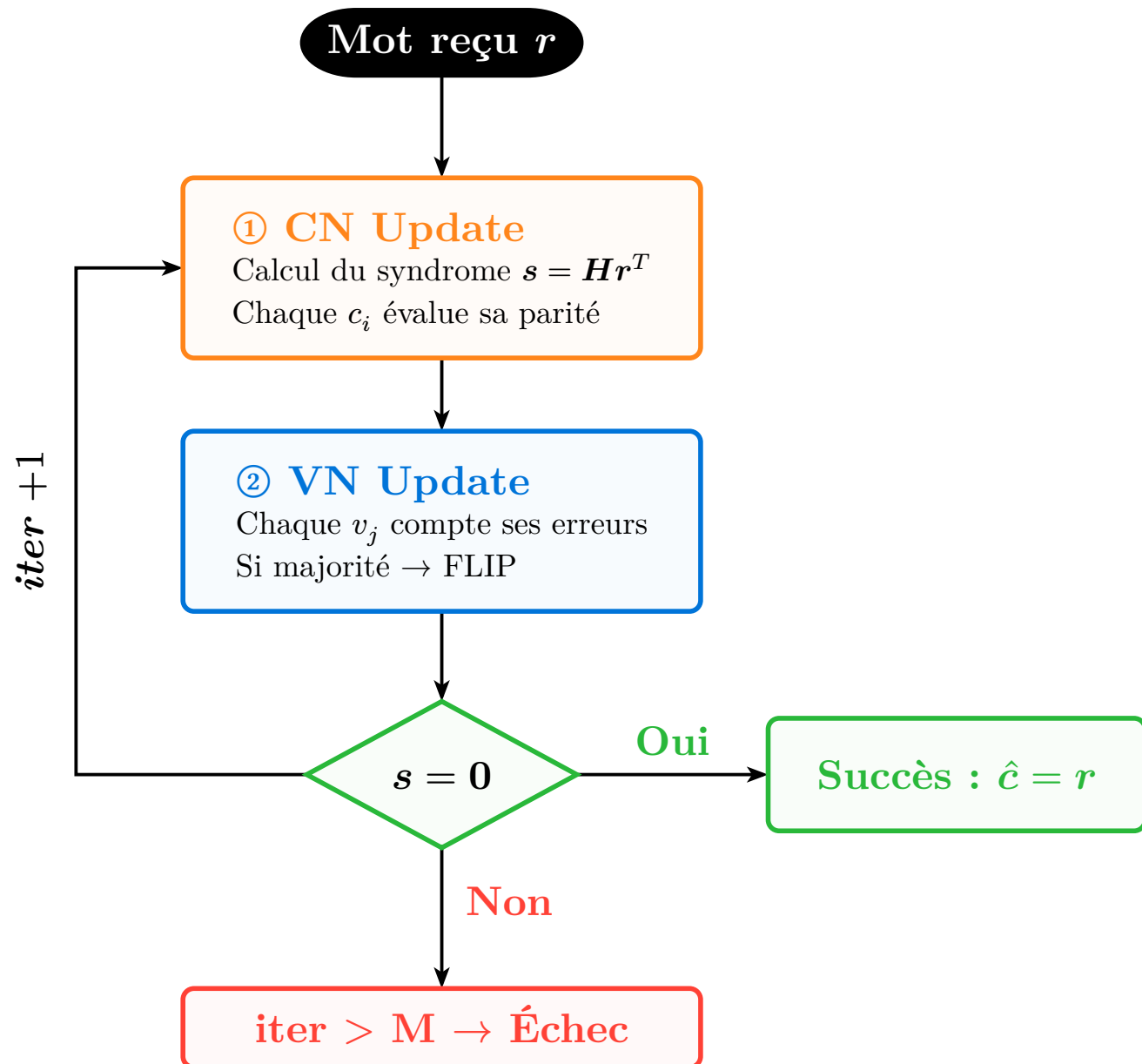


$CN \rightarrow VN$

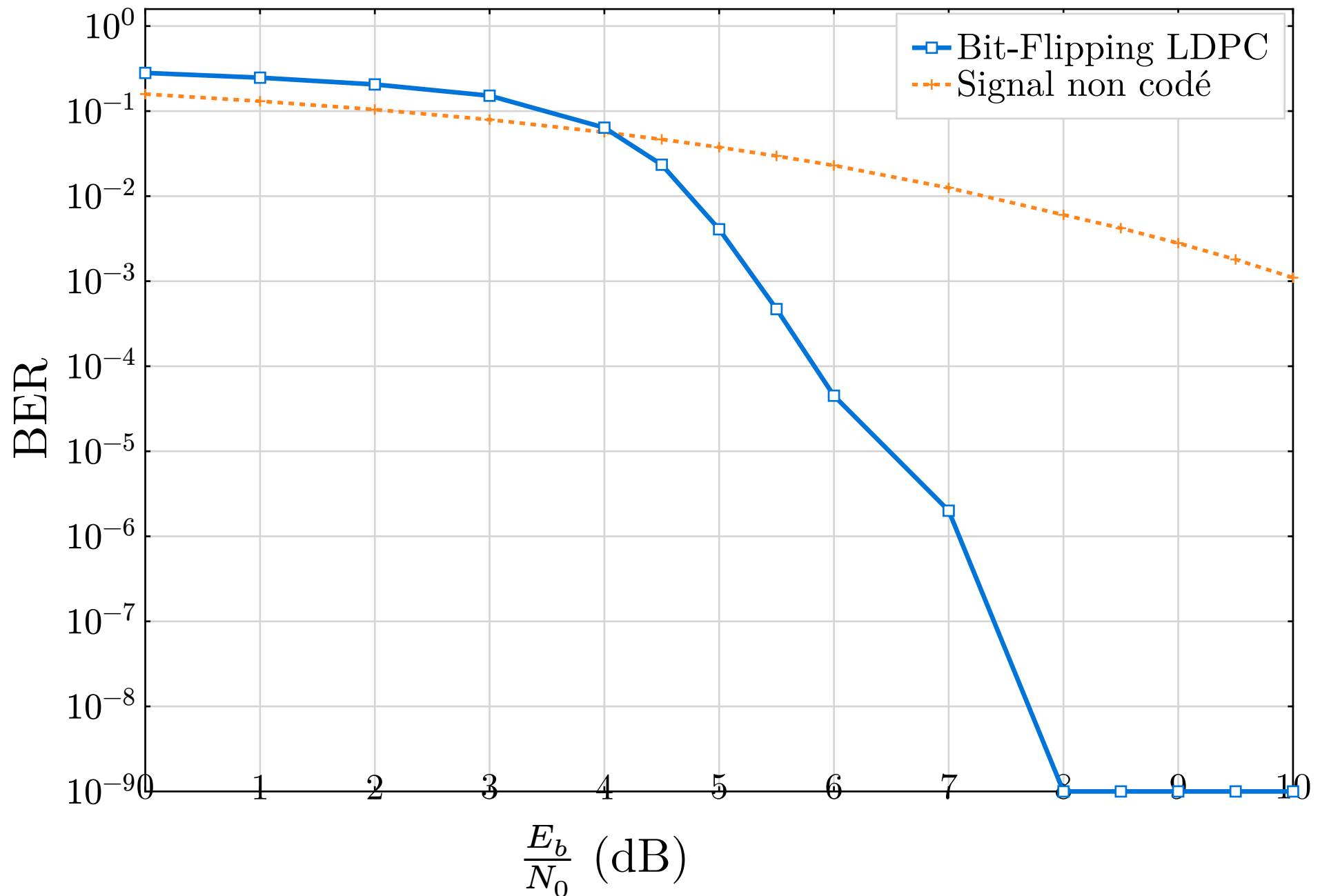


Correction

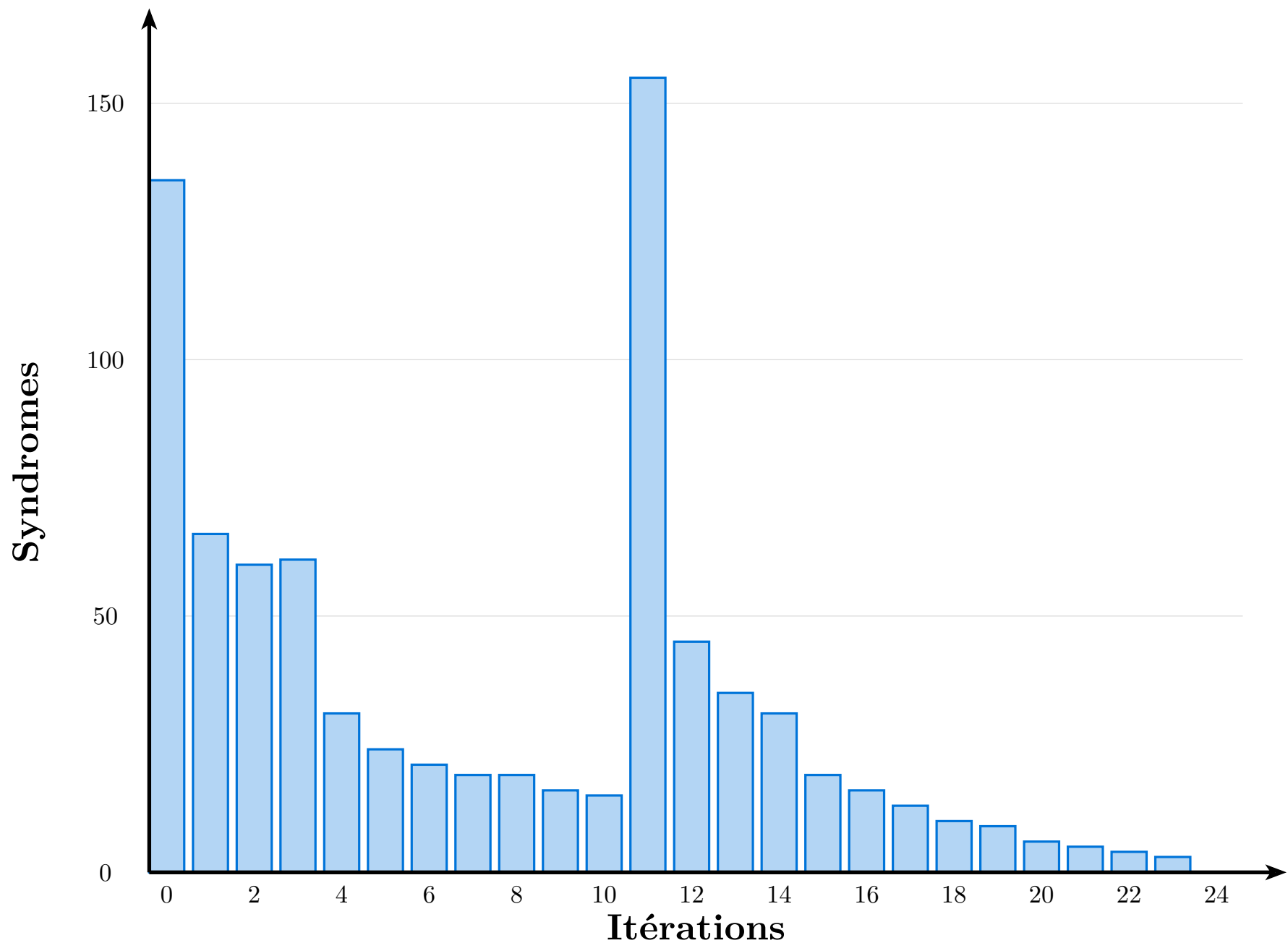
# Bit-Flipping : Graphe de flot de contrôle



# Waterfall : LDPC (3, 6) $n = 1296$ , $k = 648$ , $R = \frac{1}{2}$



# Résultats : Convergence syndrome



# Bit-Flipping : Analyse

## Avantages

- **Complexité** : simples XOR et compteurs –  $\mathcal{O}(n)$  par itération

## Limite

- Ignore la **confiance** du récepteur physique dans le signal
- Un bit reçu à 0.51 V est traité comme 0



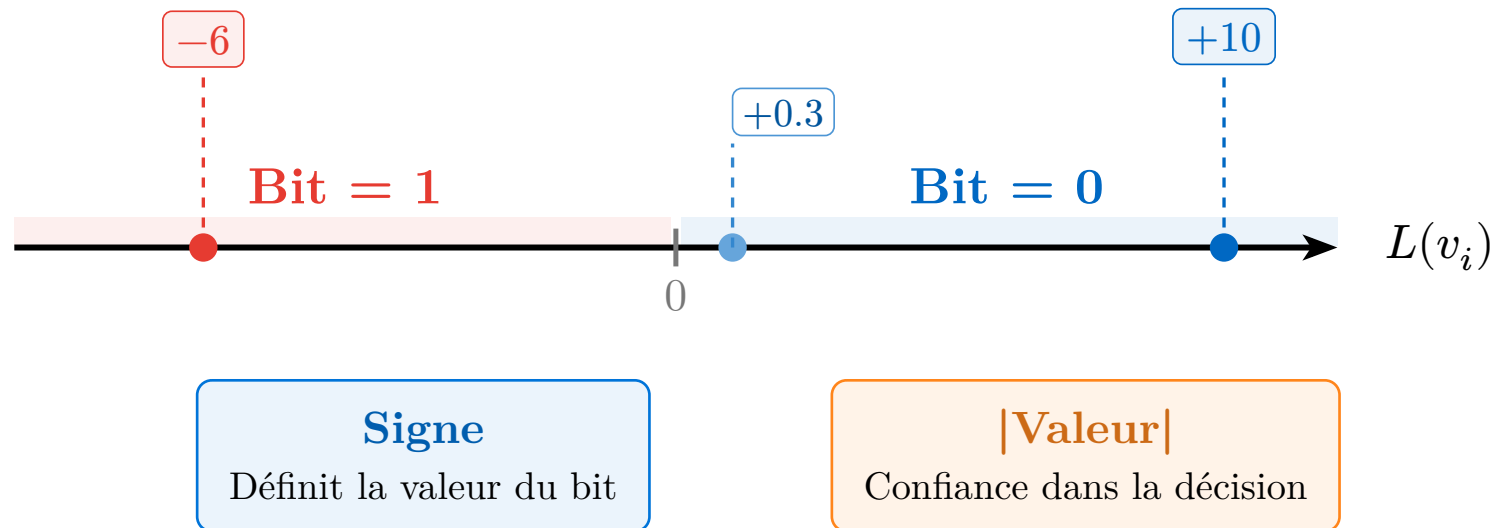
# Décodage Soft : Le LLR

## Signal

On reçoit une valeur  $y_i$  (ex: +4.5V ou -0.2V).

## Log-Likelihood Ratio (LLR)

$$L(v_i) = \ln \left( \frac{P(v_i = 0 \mid y_i)}{P(v_i = 1 \mid y_i)} \right)$$



# Sum-Product : Belief Propagation

## Décodage Optimal

Échange itératif de croyances (LLR) entre les nœuds du graphe

## Information Extrinsèque

Exclure l'avis du destinataire pour éviter l'auto-influence

## Mise à jour CN

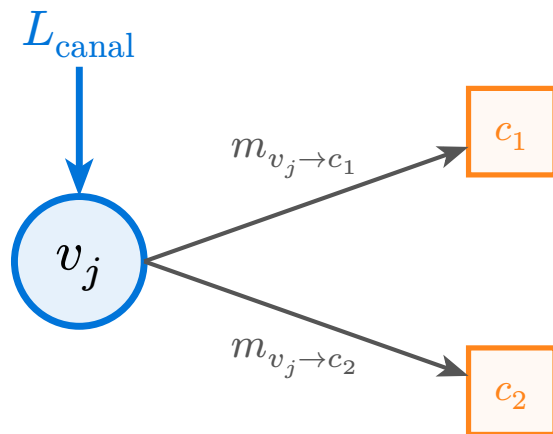
$$m_{c \rightarrow v} = 2 \tanh^{-1} \left( \prod_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} \tanh \left( \frac{m_{u \rightarrow c}}{2} \right) \right)$$

## Mise à jour VN

$$m_{v \rightarrow c} = L_{v\text{canal}} + \sum_{c' \in \mathcal{N}(v) \setminus \{c\}} m_{c' \rightarrow v}$$

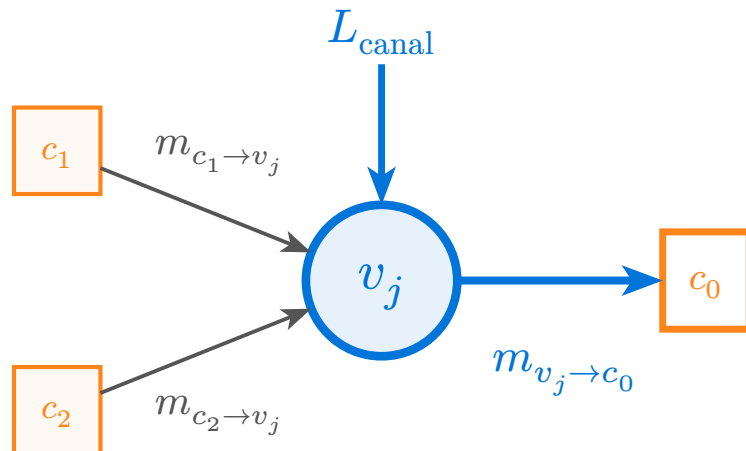
# Sum-Product

## Initialisation



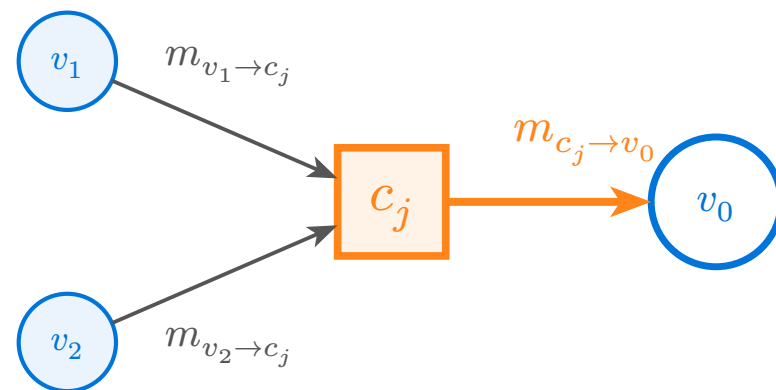
$$m_{v_j \to c_i} = L_{\text{canal}}$$

## Échange VN

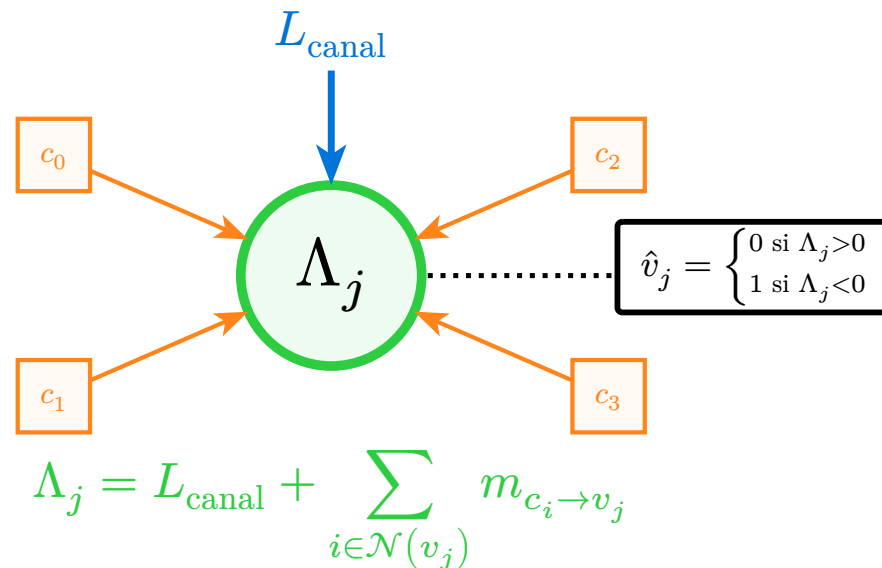


Itérations  
 $i = 1, \dots, I_{\max}$

## Échange CN

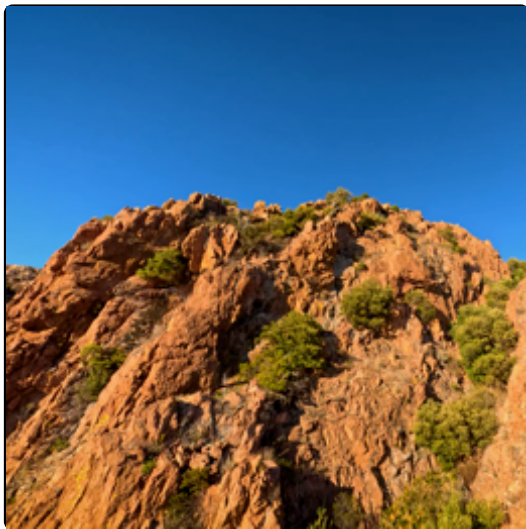


## Décision Finale



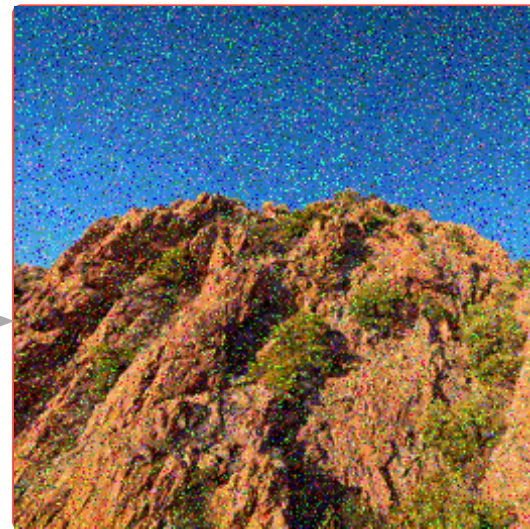
# Transmission d'image

Originale

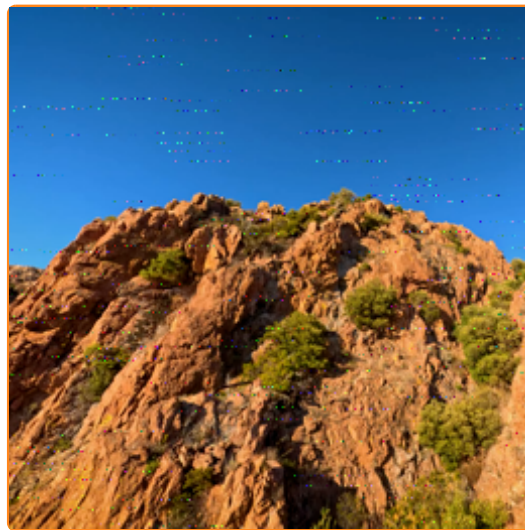


*AWGN (2.3 dB)*

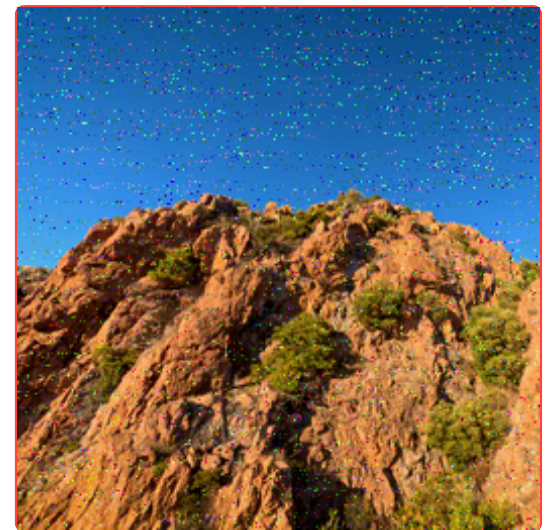
Reçue (Bruité)



$$R = \frac{1}{2}$$



$$R = \frac{2}{3}$$



$$R = \frac{3}{4}$$

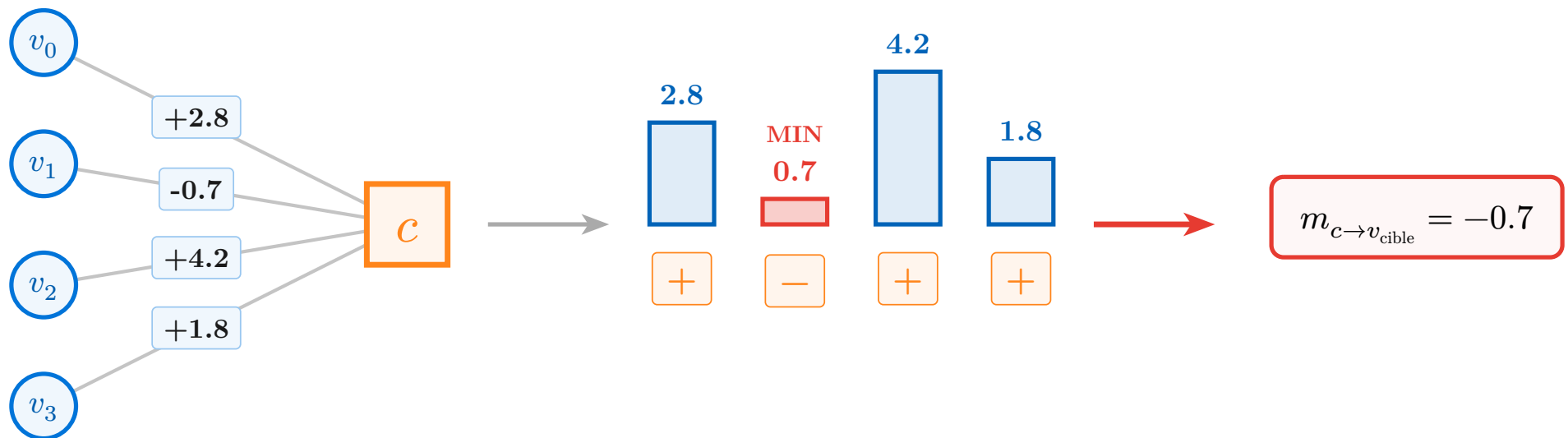
# Min-Sum

## Avantage Matériel

- **Comparateurs** pour le minimum
- **XOR** pour le produit des signes

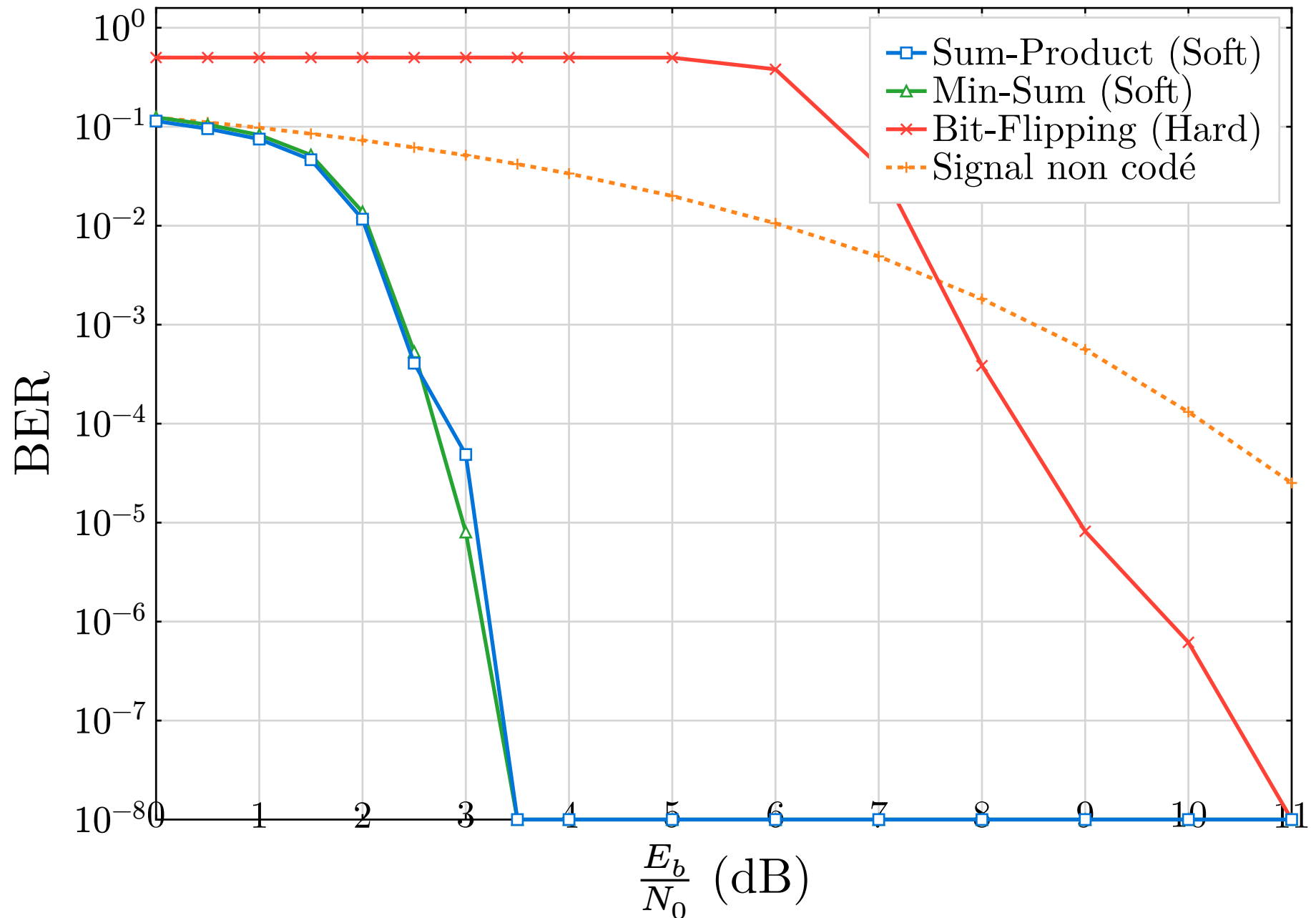
## Mise à jour du CN

$$m_{c \rightarrow v_i} = \prod_{j \neq i} \text{sgn}(m_{v_j \rightarrow c}) \times \min_{j \neq i} |m_{v_j \rightarrow c}|$$

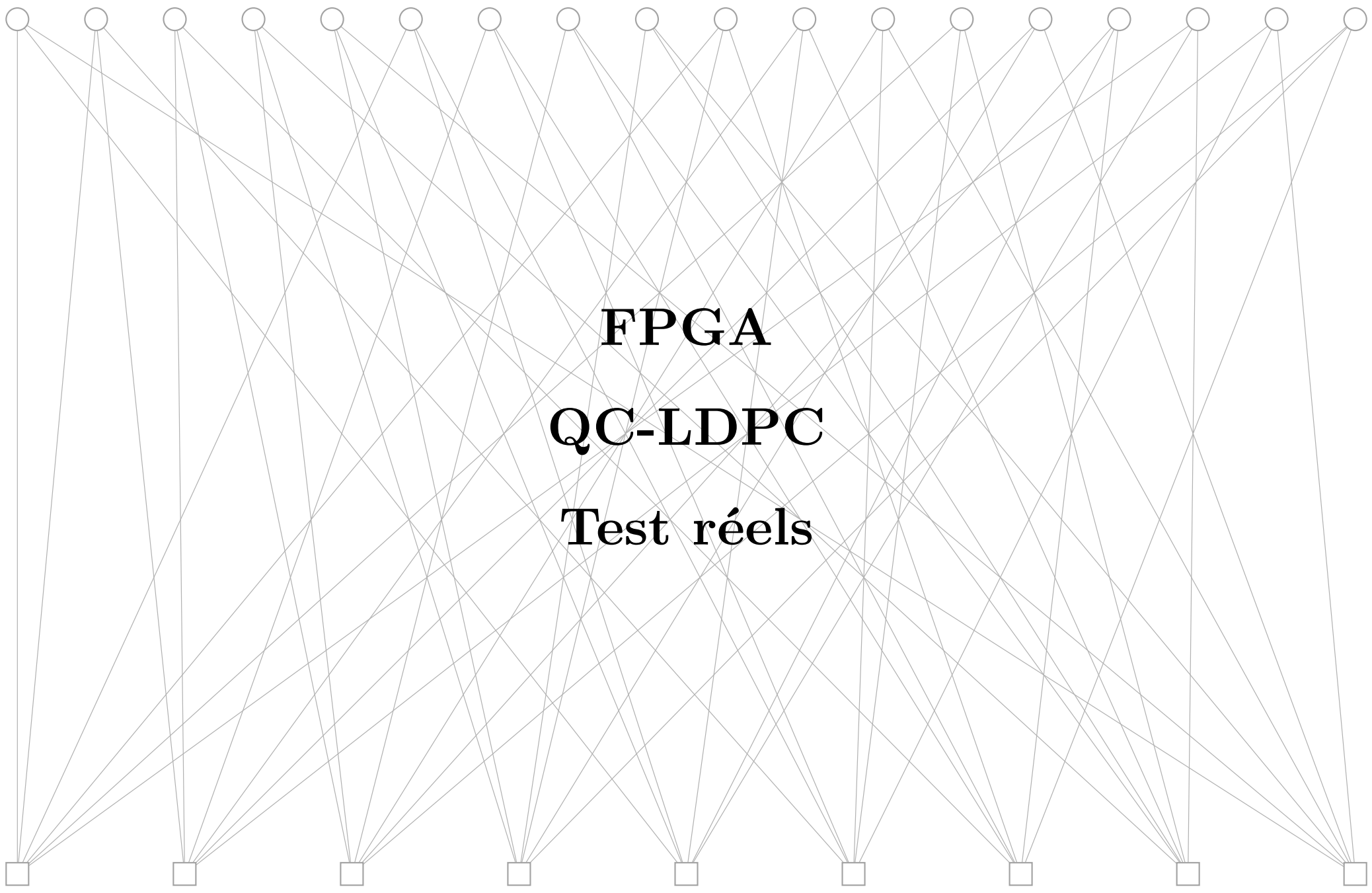


$$\text{Pour les VN : } m_{v \rightarrow c} = L_{\text{canal}} + \sum_{c' \neq c} m_{c' \rightarrow v}$$

# Waterfall : LDPC (3, 9) $n = 1296$ , $k = 864$ , $R = \frac{2}{3}$



# Conclusion



**FPGA**  
**QC-LDPC**  
**Test réels**

## Annexe





# Définition : Codes Linéaires en Bloc

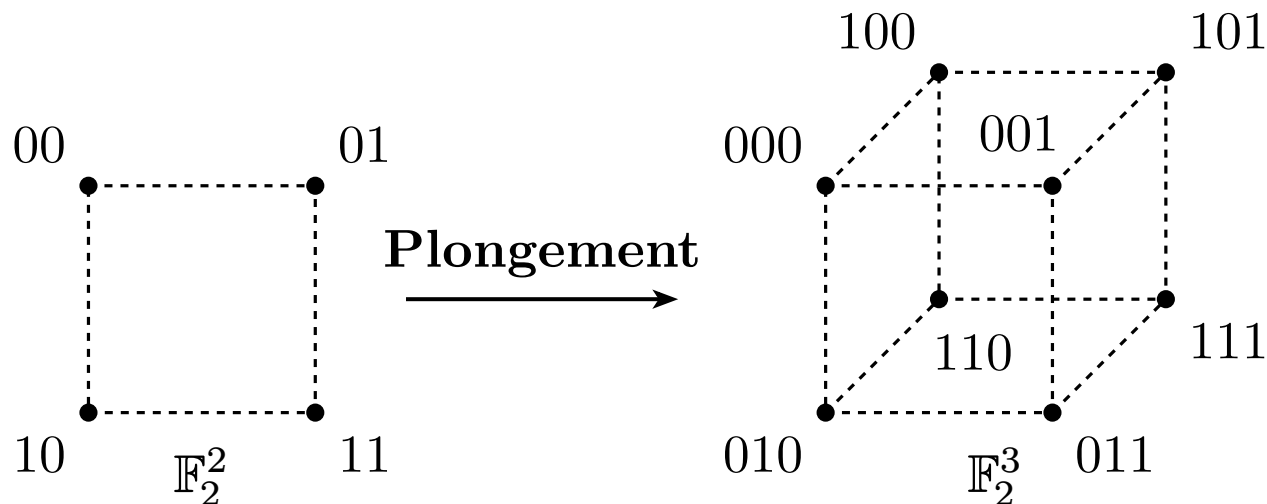
Code  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$

$\mathcal{C}$  sous-espace vectoriel de dimension  $k$  de  $\mathbb{F}_2^n$

- $k$  : longueur du message original
- $n$  : longueur du mot de code
- $m = n - k$  : nombre de bits de parités

**Encodage**

$\Phi : \mathbb{F}_2^k \rightarrow \mathbb{F}_2^n \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_2^k, \mathbb{F}_2^n)$



# Définition : Matrice Génératrice

## Matrice Génératrice

$G \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{F}_2)$  dont les lignes sont une base de  $\mathcal{C}$

## Encodage

Pour un message  $u \in \mathbb{F}_2^k$  le mot de code  $c \in \mathcal{C}$  est :

$$c = \Phi(u) = u \odot G$$

## Forme systématique

$$G = \begin{bmatrix} I_k & P \end{bmatrix}$$

- Pour  $u \in \mathbb{F}_2^k$ ,  $u \odot G = \begin{bmatrix} u & u \odot P \end{bmatrix}$
- $P \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{F}_2)$  matrice de parité

# Définition : Matrice de Contrôle

## Matrice de Contrôle

$$H = \begin{bmatrix} P^\top & I_{n-k} \end{bmatrix}$$

- $\mathcal{C} = \ker(H) = \{v \in \mathbb{F}_2^n \mid H \odot v^\top = 0\}$
- $G \odot H^\top = 0$

## Syndrome

Pour un vecteur reçu  $r = c + e$ ,  $s \in \mathbb{F}_2^{n-k}$

$$s = Hr^\top = Hc^\top + He^\top = 0 + He^\top$$

- Si  $s = 0$ ,  $r$  est un mot de code valide
- Sinon  $s$  donne la signature de l'erreur  $e$

# Théorie derrière la définition des codes linaires

Poser les notations algébriques etc...

# Définition du BER et SFR

# Decodage par maximum de vraisemblance

Expliquer, quelle distance ? etc

# Code LDPC non régulier





# CN Update : Formalisme probabiliste

Soit  $(V_u)_{u \in \mathcal{N}(c)}$  une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{F}_2$ . On cherche à déterminer la loi du message  $R_{c \rightarrow v}(b)$  envoyé par le nœud de contrôle  $c$ .

## Conditionnement de l'événement de parité

Le message  $R_{c \rightarrow v}(b)$  correspond à la probabilité conditionnelle :

$$R_{c \rightarrow v}(b) = P \left( \bigoplus_{u \in \mathcal{N}(c)} V_u = 0 \mid V_v = b \right)$$

Par linéarité du XOR, cette condition est équivalente à :

$$P \left( \bigoplus_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} V_u = b \right)$$

Par le théorème des probabilités totales appliqué au système complet d'événements associé aux configurations  $x \in \mathbb{F}_2^{d_c-1}$  des voisins :

$$R_{c \rightarrow v}(b) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_2^{d_c-1} \\ \bigoplus_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} x_u = b}} \prod_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} P(V_u = x_u)$$

# CN Update (1) : Probabilités

En utilisant les messages entrants du graphe, on définit la probabilité locale  $P_{u \rightarrow c}(x_u) = P(V_u = x_u)$ .

Le message sortant devient :

$$R_{c \rightarrow v}(b) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_2^{d_c-1} \\ \bigoplus_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} x_u = b}} \prod_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} P_{u \rightarrow c}(x_u)$$

Exacte mais complexité est exponentielle en  $d_c$ . On utilise alors une transformation pour simplifier le calcul (Lemme de Gallager).

# CN Update (2) : Lemme de Gallager

**Lemme de Gallager** – Soient  $(X_1, \dots, X_n)$  des variables de Bernoulli indépendantes sur  $\mathbb{F}_2$ .

$$P\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i = 0\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \prod_{i=1}^n E[(-1)^{X_i}]\right)$$

On notes :

$$E[(-1)^{V_u}] = \delta_{u \rightarrow c} = P(V_u = 0) - P(V_u = 1) = 1 - 2P_{u \rightarrow c}(1)$$

On en déduit les probabilités marginales conditionnelles pour le nœud  $c$  :

$$R_{c \rightarrow v}(0) = \frac{1}{2} \left(1 + \prod_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} \delta_{u \rightarrow c}\right), \quad R_{c \rightarrow v}(1) = \frac{1}{2} \left(1 - \prod_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} \delta_{u \rightarrow c}\right)$$

# CN Update (3) : Passage aux LLR

## Log-Likelihood Ratio (LLR)

Le message LLR entrant  $m_{u \rightarrow c}$  au nœud de contrôle est défini par :

$$m_{u \rightarrow c} = \ln \left( \frac{P(V_u = 0)}{P(V_u = 1)} \right)$$

$\delta_{u \rightarrow c}$  s'exprime alors :

$$\delta_{u \rightarrow c} = \tanh \left( \frac{m_{u \rightarrow c}}{2} \right)$$

On en déduit le LLR du message sortant :

$$m_{c \rightarrow v} = \ln \left( \frac{R_{c \rightarrow v}(0)}{R_{c \rightarrow v}(1)} \right) = 2 \tanh^{-1} \left( \prod_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} \tanh \left( \frac{m_{u \rightarrow c}}{2} \right) \right)$$

# CN Update (4) : Algorithmes

**Sum-Product** – Mise à jour :

$$m_{c \rightarrow v} = 2 \tanh^{-1} \left( \prod_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} \tanh \left( \frac{m_{u \rightarrow c}}{2} \right) \right)$$

**Min-Sum** – Approximation :

$$m_{c \rightarrow v} \approx \left( \prod_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} \operatorname{sgn}(m_{u \rightarrow c}) \right) \times \min_{u \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} |m_{u \rightarrow c}|$$









# Progressive Edge-growth